Bevezetés az általános relativitáselméletbe

Bene Gyula
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A

2002. október 4.

1. Előadás

Tematika: ld. http://glu.elte.hu/˜bene/

Ajánlott irodalom:

- Landau-Lifsic: Elméleti fizika II. Klasszikus erőterek (Tankönyvkiadó, 1976).
- Hraskó Péter: Bevezetés az általános relativitáselméletbe (Műegyetemi kiadó, 1997).
- Hraskó Péter: Relativitáselmélet (Typotex, 2002).
- Perjés Zoltán: Általános relativitáselmélet (ELTE Eötvös Kiadó, 1999).
- http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5

Eredeti cikkek:

Általános relativitáselmélet:

A.Einstein, Die Feldgleichungen der Gravitation, Berl. Ber. 44 (1915) 844.).

Eötvös Loránd szerepe. Az Eötvös-kísérlet, 1908-1909.

[1] R. v. Eötvös, Mathematishe und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, 8,65,1890.

[2] R. v. Eötvös, Verhandlungen der 16. Allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung (London-Cambridge, 21-29 September 1909)

[3] R. v. Eötvös, D. Pekár, E. Fekete: Beiträge zum Gesetz der Proportionalität von Trägheit und Gravität; a Beneke Alapítványhoz benyújtott pályamű, 1909.

1.1. Előzmény: a speciális relativitáselmélet (A.Einstein, 1905)

- Események, vonatkoztatási rendszer, inerciarendszer
- Lorentz-transzformáció

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

A klasszikus elektrodinamika egyenletei kovariánsak a Lorentz-transzformációra nézve (a transzformált mennyiségek közötti kapcsolat ugyanolyan alakú, mint amilyen a nem transzformált mennyiségek között volt).

$\rightarrow$ A fénysebesség minden inerciarendszerben ugyanakkora. Michelson-kísérlet, 1881 és Michelson-Morley-kísérlet, 1887.

- Nincs kitüntetett inerciarendszer: a természet **minden** törvénye azonos alakú a különböző inerciarendszerekben (**relativitás elve**) $\rightarrow$ A Lorentz-transzformáció a téridő tulajdonságait jellemzi.

Ívhossz:

$$s^2 = c^2 t'^2 - \boldsymbol{r}'^2 = c^2 t^2 - \boldsymbol{r}^2$$

(Levezetések: az ívhossz invarianciája, Lorentz-transzformáció) Másképpen

$$s^2 = g_{ik} x^i x^k$$

ahol

$$x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$$

és

$$g_{ik} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Sajátidő:

$$\tau^2 = t^2 - \boldsymbol{r}^2/c^2$$

Minkowski-tér. Időszerű, térszerű, fényszerű ívhosszak.

- Az egyidejűség relativitása

$$x_1 \neq x_2,\ t_1 = t_2 \rightarrow t_1' \neq t_2' \tag{2}$$

A Lorentz-transzformáció szerint ui.

$$t_2' - t_1' = \frac{-\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3}$$

- Lorentz-kontrakció

Mozgó méterrúd végei (t,x) a K rendszerből mérve: $(0,0)$ és $(0,L)$

A K' (együttmozgó) rendszerben ugyanezek az események: $(0,0)$ és (t', L_0)

A Lorentz-transzformáció alapján

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4}$$

azaz

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{5}$$

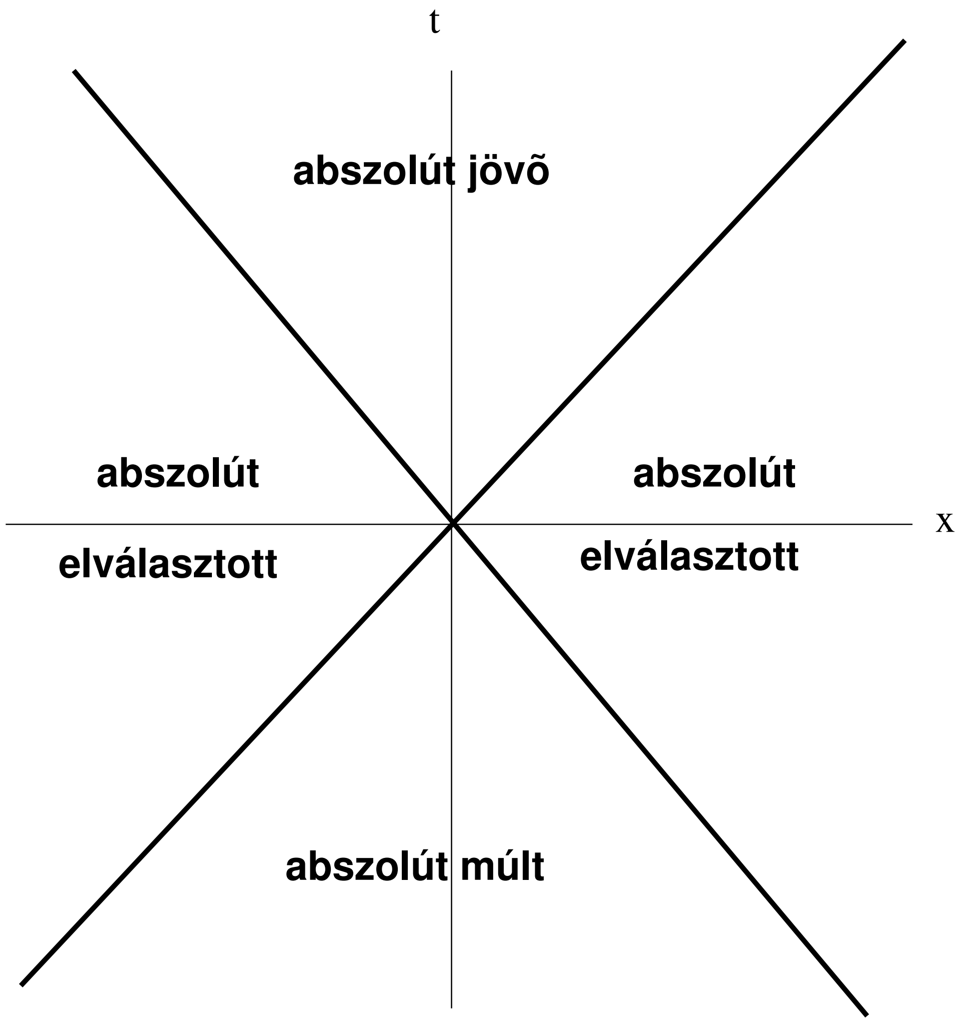
- Idődilatáció

Mozgó óra adott (0 ill. τ) mutatóállásai a K rendszerből mérve: $(0,0)$ és (t,x)

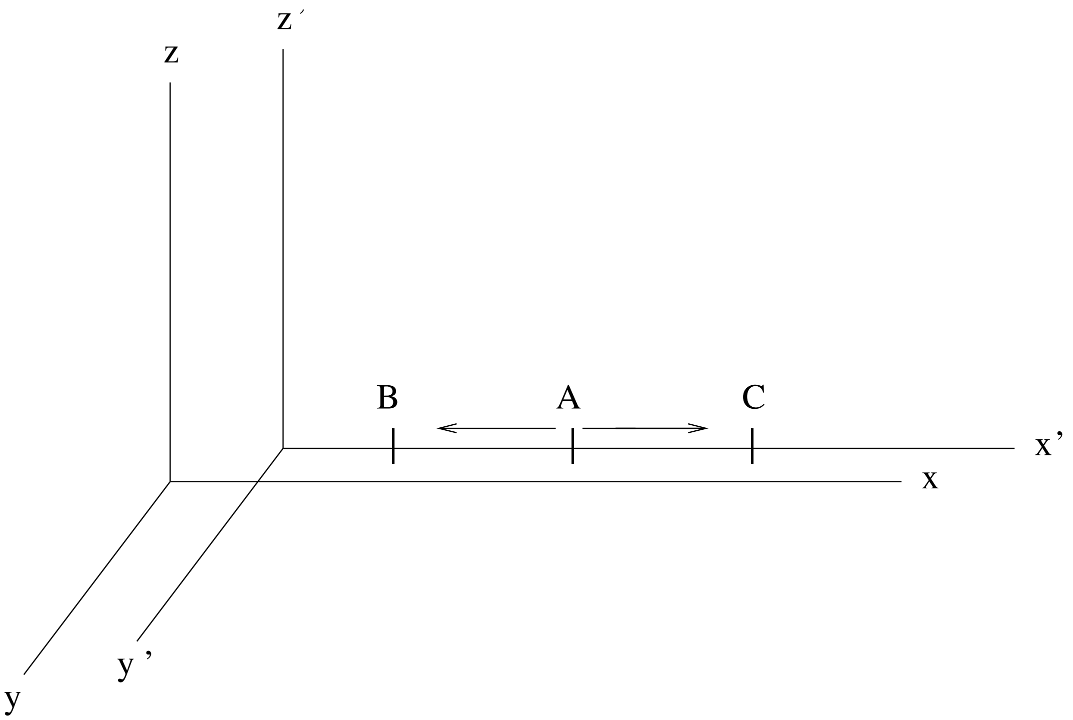
A K' (együttmozgó) rendszerben ugyanezek az események: $(0,0)$ és $(\tau, 0)$

A Lorentz-transzformáció alapján

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{6}$$



ábra 1: A téridő egyes tartományainak kauzális kapcsolata az origóban történt eseménnyel.



ábra 2: Az **A** pontból kibocsájtott fényjelek a **K'** rendszerből mérve egyidejűleg érnek a **B** és **C** pontokba, míg a **K** rendszerből mérve különböző időpontokban.

- Ikerparadoxon
- Sebességek transzformációja

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}$$

$$v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}$$

(a sebeség irányának megváltozása, fényaberráció)

- Négyesvektorok

  Az idő és a koordináták transzformációs szabálya szerint transzformálódó mennyiségek.

  t, x, y, z

  E, p_x, p_y, p_z

  ϕ, A_x, A_y, A_z

- Relativisztikus mechanika

  Négyessebesség:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau}$$

$$u_x = \frac{v}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$u_t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Négyesimpulzus:

$$p^i = mu^i$$

Az időszerű komponens az energia.

Legkisebb hatás elve.

$$S = -mc\int_a^b ds$$

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$c \to \infty$ határátmenet.

1.2. Gyorsuló koordinátarendszerek

- Az eredeti kérdésfeltevés: megfogalmazhatók-e a természeti törvények olyan alakban, amely tetszőleges koordinátatranszformációra nézve kovariáns?

- Forgó koordinátarendszer

$$x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t, y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t, z = z'$$

  Ívelemnégyzet:

$$ds^2 = \left[c^2 - \omega^2(x'^2 + y'^2)\right] dt^2 - dx^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\omega y'dx'dt - 2\omega x'dy'dt$$

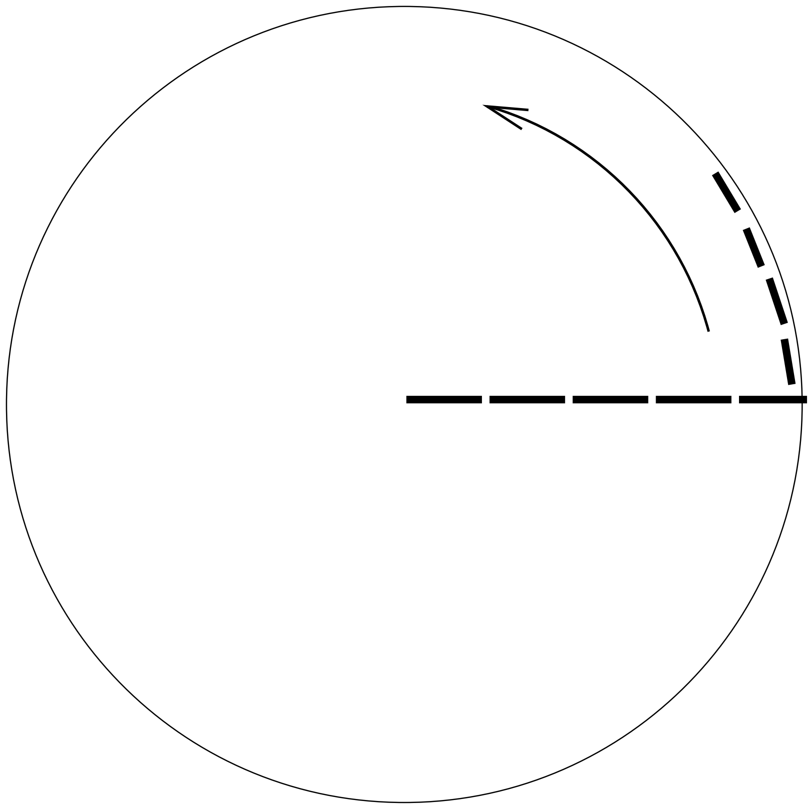
  Az ívelemnégyzet invariáns (skalár), de a koordinátadifferenciálokkal kifejezett alakja más és más.

- Metrikus tenzor Általános esetben

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$$

- Az ekvivalencia elve

  (Hasonlóságok és különbségek)



ábra 3: A forgó korong kerülete mentén elhelyezett mérőrudak Lorentz-kontrakciót szenvednek, míg a sugár mentén elhelyezett mérőrudak hossza változatlan.

- Görbevonalú koordináták

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$$

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k$$

Kontravariáns négyesvektor:

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k$$

Négyestenzorok. Kontravariáns metrikus tenzor:

$$g^{ik}$$

Jacobi-determináns:
(levezetés)

$$J = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)} = \frac{1}{\sqrt{-g}}$$

Invariáns térfogatelem:

$$\sqrt{-g} d\Omega$$

- Távolságok és időtartamok
  Adott pontban eltelt idő:
  (levezetés)

$$\tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{00}} dx^0$$

Két pont távolsága:

(levezetés)

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}}$$

$$\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}$$

- Egyidejűség, órák szinkronizálása
  (levezetés)

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}}$$