Bevezetés az általános relativitáselméletbe

Bene Gyula
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A

2002. október 4.

2. Előadás

2.1. Ismétlés

- Gyorsuló koordinátarendszerekben az ívelemnégyzet $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k \rightarrow$ görbevonalú koordináták
- Lokálisan a gravitációs tér gyorsuló rendszerrel ekvivalens (ekvivalencia elve)
- A gravitációs tér a téridő nem-Minkowski geometriájaként jelenik meg az általános relativitáselméletben
- A vonatkoztatási rendszer fogalma
- Kovariáns és kontravariáns négyesvektorok és négyestenzorok

2.2. Példa (távolságok, időtartamok, órák szinkronizálása): forgó vonatkoztatási rendszer

- Ívelemnégyzet:

$$ds^2 = (c^2 - \omega^2 r^2)dt^2 - 2\omega r^2 d\varphi dt - dz^2 - r^2 d\varphi^2 - dr^2$$

- Időtartam:

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}\, t$$

($\rightarrow$ vöröseltolódás)

- Szinkronizálás zárt görbe mentén nem lehetséges:

$$\Delta t = -\frac{1}{c}\oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha = \frac{1}{c^2}\oint \frac{\omega r^2 d\varphi}{1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}} \approx \frac{\omega}{c^2}\oint r^2 d\varphi = \pm\frac{2\omega}{c^2} S$$

- Távolság:

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}$$

A kerület és a sugár aránya:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} > 2\pi$$

$\rightarrow$ nemeuklideszi geometria

2.3. Mozgás görbült téridőben

- A metrikus tenzor (g_{ik}) tulajdonságai (szimmetrikus, 10 független komponens, $+---$ szignatúra)
- Görbült téridő: a metrikus tenzor semmilyen koordinátatranszformációval nem hozható mindenütt Minkowski-alakra.
- Kovariáns differenciálás.

  –

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k$$

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k d\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx^l$$

$\rightarrow$ dA_i nem transzformálódik vektorként!

Ok: nem azonos pontbeli vektorokat vontunk ki egymásból.

– Párhuzamos eltolás

$$DA^i = (A^i + dA^i) - (A^i + \delta A^i) = dA^i - \delta A^i$$

Infinitezimális eltolás esetén δA^i homogén lineáris függvénye a vektorkomponenseknek és az eltolásnak:

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^k dx^l$$

Γ^i_{kl}: Christoffel-szimbólum ("affine connection"). Nem tenzor!

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k dx^l$$

– Kovariáns differenciál, kovariáns derivált:

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k \right) dx^l$$

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k \right) dx^l$$

$$A^i_{;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k$$

$$A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k$$

$$A^i_{k;l} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} - \Gamma^m_{kl} A^i_m + \Gamma^i_{ml} A^m_k$$

– A Christoffel-szimbólumok alsó indexeikben szimmetrikusak
(levezetés)

– A Christoffel-szimbólumok és a metrikus tenzor kapcsolata

$$DA_i = g_{ik} DA^k$$

$$DA_i = D\left(g_{ik} A^k\right) = g_{ik} DA^k + A^k D g_{ik}$$

$\rightarrow$ A metrikus tenzor kovariáns deriváltja nulla.

$$g_{ik;l} = 0$$

Ezt felhasználva

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right)$$

(levezetés)

– A kovariáns deriváltakra vonatkozó hasznos összefüggések

- Részecske mozgása gravitációs térben.

  A legkisebb hatás elve:

$$\delta S = -mc\delta \int ds = 0$$

Mozgásegyenlet:

$$\frac{Du^i}{Ds} = 0$$

(ahol $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ a négyessebesség), azaz

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0$$

- Hamilton-Jacobi-egyenlet

$$p^i = mcu^i$$

$$p_i p^i = m^2 c^2$$

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 c^2 = 0$$

- Fény terjedése

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kl} k^k k^l = 0$$

- Gyenge gravitációs tér
  Nemrelativisztikus Lagrange-függvény:

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi$$

$$ds^2 = (c^2 + 2\varphi)dt^2 - d\boldsymbol{r}^2$$

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

- Állandó gravitációs tér, gravitációs vöröseltolódás
  Sajátidőben mért frekvencia:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right)$$

$$\Delta\omega = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}\omega$$

- Az elektromágnesség egyenletei gravitációs térben.

  Térerősségtenzor:

$$F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$

  Négyes áramsűrűség:

$$j^i = \frac{\rho c}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx^i}{dx^0}$$

  Maxwell-egyenletek:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0$$

$$F^{ik}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{-g} F^{ik} \right) = -\frac{j^i}{\epsilon_0 c^2}$$

  Töltött részecske mozgása elektromágneses és gravitációs erőtérben:

$$m \left(\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl} u^k u^l \right) = q F^{ik} u_k$$