

Általános relativitáselmélet

Bene Gyula

2013.07.30

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
1. Előzmények	5
1.1. A speciális relativitáselmélet (A.Einstein, 1905)	5
2. Alapfogalmak	10
2.1. Az elmélet elvi alapjai	10
2.2. Példa gyorsuló koordinátarendszerre: egyenletesen forgó koordinátarendszer	11
2.3. Görbevonalú koordináták	13
2.4. Távolságok és időtartamok, mérhető mennyiségek	15
2.4.1. A tér adott pontjában bekövetkezett két közeli esemény között eltelt idő	16
2.4.2. Két közeli esemény valódi térbeli távolsága	16
2.4.3. Valódi (mérhető) fizikai mennyiségek	19
3. Kovariáns differenciálás	21
3.1. Párhuzamos eltolás	21
3.2. Kovariáns deriváltak	24
3.3. Erőmentes gömbszimmetrikus pörgettyű precessiója	25
4. A fizikai törvények görbült téridőben	28
5. Görbületi tenzor	31
5.1. A görbületi tenzor (Riemann-tenzor)	31
5.2. A görbületi tenzor tulajdonságai	33
5.2.1. A görbületi tenzor független komponenseinek száma	38
5.2.2. Weil-tenzor:	39
6. A gravitációs tér hatásintegrálja	40
6.1. Klasszikus mezőelméleti emlékeztető	40
6.2. Előkészítés (néhány fontos azonosság levezetése)	42
6.3. A gravitációs erőter hatásintegrálja	43

7. Energia-impulzus-tenzor	46
7.1. Példák energia-impulzus tenzorra:	49
7.1.1. Elektromágneses tér	49
7.1.2. Makroszkopikus anyag (por, gáz, folyadék stb.)	49
8. Einstein-egyenletek	50
9. Megmaradási tételek	53
10. Gömbszimmetrikus gravitációs tér	57
10.1. Gravitáló testek erőtere. Gömbszimmetrikus gravitációs tér. Schwarzschild metrika.	57
10.1.1. Mozgás gömbszimmetrikus gravitációs térben	60
10.1.2. Gravitációs kollapszus	61
11. Gyenge gravitációs mezők	63
11.1. Sztatikus gravitációs tér	64
11.2. Stacionárius gravitációs tér	65
11.3. Gravitációs hullámok	65
11.3.1. Gravitációs hullámok terjedése Minkowski-térben	65
11.3.2. Gravitációs síkhullám által szállított energia	67
11.3.3. Gravitációs hullámok kisugárzása	67
12. Az általános relativitáselmélet kísérleti bizonyítékai	70
12.1. Az ekvivalencia elvének kísérleti bizonyítékai	70
12.2. Perihélium-elfordulás	71
12.3. A fénysugár elgörbülése gravitációs térben	76
12.4. Gravitációs vöröseltolódás	79
12.5. Erőmentes pörgettyű precessziója: a Gravity Probe B kísérlet	80
12.6. Gravitációs hullámok kisugárzása: a Hulse-Taylor-pulzár	81
13. Relativisztikus kozmológia	83
13.1. Homogén és izotróp tér	83
13.1.1. Sík tér	85
13.1.2. Pozitív görbületű tér	88
13.1.3. Negatív görbületű tér	89
13.1.4. Friedmann-Robertson-Walker-metrika	90
13.2. Friedmann-egyenletek	92
13.2.1. A divergenciaegyenlet	93
13.2.2. A Friedmann-egyenletek megoldása	94

Bevezetés

A modern asztrofizika műveléséhez elengedhetetlen az általános relativitáselmélet alapos ismerete. Nagy skálán az univerzum tágulása, a mikrohullámú háttérsugárzás tulajdonságai, kisebb skálán a ma már közhelyszámba menő fekete lyukak mind-mind olyan jelenségek, melyeket az általános relativitáselmélet segítségével értelmezhetünk. Az elmélet elsajátítása útjában két komoly akadály tornyosul: egyfelől a hallgatónak meg kell barátkoznia azzal a szokatlan gondolattal, hogy az elméletben szereplő mennyiségek általában nem azonosak a ténylegesen mérhető mennyiségekkel, pl. a koordináták és az idő különbségei általában nem felelnek meg a valóságban mérhető távolságoknak és időtartamoknak. Ez a körülmény egyben a szemléletesség rovására is megy. Másfelől az elmélet eredményeinek levezetéséhez szükséges számítások a klasszikus fizika egyéb ágaihoz képest fáradságosak, ami a kezdőnek könnyen a kedvét szegheti. Ez utóbbi technikai nehézség a különböző szimbolikus számításokra képes számítógépes programcsomagok (Reduce, Mathematica, Maple) alkalmazásával azonban jelentősen mérsékelhető.

A jelen jegyzet célja az asztrofizika szakirányon tanuló MSC hallgatók bevezetése az általános relativitáselmélet alapjaiba. A hangsúly az elmélet biztos alkalmazni tudásán lesz, ennek megfelelően az elvi kérdések tárgyalását igyekszem a szükséges minimumra korlátozni. A relativitáselmélet (speciális relativitáselmélet: 1905, általános relativitáselmélet: 1915) a maga korában hatalmas közérdeklődést váltott ki, ami máig is tart. Ez sajnos azzal a nemkívánatos mellékhatással járt, hogy a relativitáselméletet sokan egyfajta ezoterikus-filozofikus elméletnek tartják. Hazánkban is szinte évente jelentkezik egy-egy (többnyire szakképzetlen) személy azzal a kijelentéssel, hogy ő „megcáfolta” Einsteint. Természetesen minden tudományos elmélet meghaladható és bizonyos körülmények között változtatásra szorul - az általános relativitáselmélet esetében ez egészen biztosan így van abban a tartományban, ahol a gravitációs és a kvantumfizikai hatások összemérhetőek. Az viszont nem elegendő indok az elmélet elvetésére, ha valaki a saját világképével nem érzi azt összeegyeztethetőnek.

Az általános relativitáselmélet matematikai formalizmusa rengeteget fejlődött az elmélet megalkotása óta eltelt évszázad alatt. Ezt részben az egzakt megoldások keresése, részben a tételek egzakt bizonyítása, részben az elmélet továbbfejlesztése (pl. kvantálása) iránti igény ösztönözte. Bevezető munkáról lévén szó, ebben a jegyzetben csak a standard egyetemi differenciálgeometriát alkalmazzuk.

A használt konvenciók a Landau-Lifsic: Elméleti fizika II. - Klasszikus erőterek c. könyvben alkalmazottakat követik. A téridő-koordinátákat latin betűkkel, a térkoordinátákat görög betűkkel jelölöm. Előbbiek a 0, 1, 2, 3, utóbbiak az 1, 2, 3 értékeket vehetik fel. A metrika szignatúrája (sajátértékeinek előjele) $+, -, -, -$.

Ajánlott irodalom:

- Landau-Lifsic: Elméleti fizika II. Klasszikus erőterek (Tankönyvkiadó, 1976).
- Hraskó Péter: Bevezetés az általános relativitáselméletbe (Műegyetemi kiadó, 1997).
- Hraskó Péter: Relativitáselmélet (Typotex, 2002).
- Perjés Zoltán: Általános relativitáselmélet (ELTE Eötvös Kiadó, 1999).
- <http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5>

Eredeti cikkek:

- A.Einstein, Die Feldgleichungen der Gravitation, Berl. Ber. 44 (1915) 844.
- R. v. Eötvös, Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, 8,65,1890.
- R. v. Eötvös, Verhandlungen der 16. Allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung (London-Cambridge, 21-29 September 1909)
- R. v. Eötvös, D. Pekár, E. Fekete: Beiträge zum Gesetz der Proportionalität von Trägheit und Gravität; a Beneke Alapítványhoz benyújtott pályamű, 1909.

1. fejezet

Előzmények

A speciális relativitáselmélet: események és inerciarendszerek, Lorentz-transzformáció, Minkowski-tér, sajátidő, az egyidejűség relativitása, Lorentz-kontrakció, idődilatació, ikerparadoxon, négyesvektorok, relativisztikus mechanika.

1.1. A speciális relativitáselmélet (A.Einstein, 1905)

Események, vonatkoztatási rendszer, inerciarendszer
Lorentz-transzformáció

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.1)$$

$$y' = y \quad (1.2)$$

$$z' = z \quad (1.3)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.4)$$

A klasszikus elektrodinamika egyenletei kovariánsak a Lorentz-transzformációra nézve (a transzformált mennyiségek közötti kapcsolat ugyanolyan alakú, mint amilyen a nem transzformált mennyiségek között volt).

→ A fénysebesség minden inerciarendszerben ugyanakkora. Michelson-kísérlet, 1881 és Michelson-Morley-kísérlet, 1887.

Nincs kitüntetett inerciarendszer: a természet minden törvénye azonos alakú a különböző inerciarendszerekben (relativitás elve) \rightarrow

A Lorentz-transzformáció a téridő tulajdonságait jellemzi.

Ívhossz:

$$s^2 = c^2 t'^2 - \mathbf{r}'^2 = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2 \quad (1.5)$$

Másképpen

$$s^2 = g_{ik} x^i x^k \quad (1.6)$$

ahol

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (1.7)$$

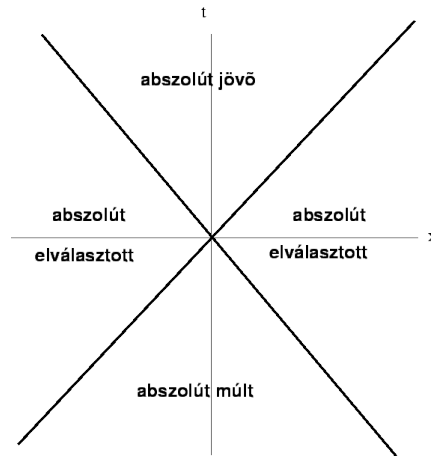
és

$$g_{ik} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (1.8)$$

Sajátidő:

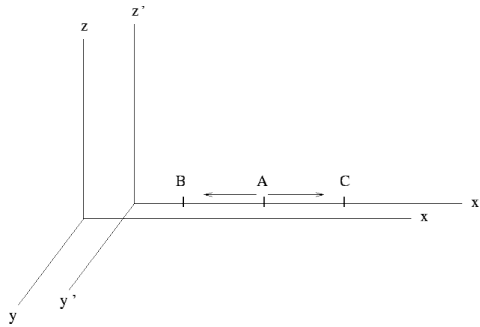
$$\tau^2 = t^2 - \mathbf{r}^2/c^2 \quad (1.9)$$

Minkowski-tér. Időszerű, térszerű, fényszerű ívhosszak.



1.1. ábra. A téridő egyes tartományainak kauzális kapcsolata az origóban történt eseménnyel.

Az egyidejűség relativitása



1.2. ábra. Az A pontból kibocsájtott fényjelek a K' rendszerből mérve egyidejűleg érnek a B és C pontokba, míg a K rendszerből mérve különböző időpontokban.

$$x_1 \neq x_2, t_1 = t_2 \rightarrow t'_1 \neq t'_2 \quad (1.10)$$

A Lorentz-transzformáció szerint ui.

$$t'_2 - t'_1 = \frac{-\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.11)$$

Lorentz-kontrakció

Mozgó méterrúd végei (t, x) a K rendszerből mérve: $(0, 0)$ és $(0, L)$ A K' (együttmozgó) rendszerben ugyanezek az események: $(0, 0)$ és (t', L_0) A Lorentz-transzformáció alapján

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.12)$$

azaz

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.13)$$

Idődilatáció

Mozgó óra adott $(0$ ill. $\tau)$ mutatóállásai a K rendszerből mérve: $(0, 0)$ és (t, x) A K' (együttmozgó) rendszerben ugyanezek az események: $(0, 0)$ és $(\tau, 0)$ A Lorentz-transzformáció alapján

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.14)$$

Ikerparadoxon
 Sebességek transzformációja

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \quad (1.15)$$

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \quad (1.16)$$

$$v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \quad (1.17)$$

(a sebesség irányának megváltozása, fényaberráció)
 Négyesvektorok

Az idő és a koordináták transzformációs szabálya szerint transzformálódó mennyiségek.

$$t, x, y, z \quad (1.18)$$

$$E, p_x, p_y, p_z \quad (1.19)$$

$$\phi, A_x, A_y, A_z \quad (1.20)$$

Relativisztikus mechanika
 Négyessebesség:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} \quad (1.21)$$

$$u_x = \frac{v}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.22)$$

$$u_t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.23)$$

Négyesimpulzus:

$$p^i = mu^i \quad (1.24)$$

Az időszerű komponens az energia. Legkisebb hatás elve.

$$S = -mc \int_a^b ds \quad (1.25)$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.26)$$

$c \rightarrow \infty$ határátmenet.

2. fejezet

Alapfogalmak

Gyorsuló koordinátarendszerek. Forgó koordinátarendszer. Metrikus tenzor. Az ekvivalencia elve. Görbevonaltú koordináták. Távolságok és időtartamok.

2.1. Az elmélet elvi alapjai

Az általános relativitáselmélet annak az igénynek a megvalósítása, hogy a természet törvényeit tetszőleges vonatkoztatási rendszerben (nem csak inerciarendszerekben) egységes, kovariáns alakban lehessen megfogalmazni. Ez többek között azt is jelenti, hogy gyorsuló koordinátarendszerekben is felírhatóknak kell lennie a természeti törvényeknek.

A speciális relativitáselmélet alkalmazásával kiderül, hogy gyorsuló koordinátarendszerekben a tér geometriája általában nem-euklideszi, a téridő geometriája pedig nem Minkowski típusú. Az ilyen általánosabb geometriák egyértelmű jellemzése a metrikus tenzor segítségével válik lehetővé.

Az általános relativitáselméletben alapvető jelentőségű felismerés az ekvivalencia elve: lokálisan semmilyen méréssel nem dönthető el, hogy gravitációs mezőben, vagy alkalmas gyorsuló koordinátarendszerben tartózkodik-e a megfigyelő. Ennek megfelelően - mivel a természet törvényei lokális törvények -, a gravitációs mező jelenlétében szintén nem-Minkowski típusú a téridő és elméleti leírása szintén a metrikus tenzorral lehetséges.

A téridő minden pontjában ismert metrikus tenzor esetén a tömegpontok és anyagi mezők (a gravitációs teret nem értve ide) mozgásegyenletei az inerciarendszerbeli törvények közvetlen általánosításaként adódnak azzal a szabállyal, hogy a téridő-koordináták szerinti parciális deriváltakat kovariáns deriváltakra kell kicserélni.

A gravitációs mezőt tömegek keltik, vagy általánosabban: a gravitációs mező forrása az energia-impulzus tenzor. Az energia-impulzus tenzor és az általa létrehozott gravitációs mező, ill. az azt leíró metrikus tenzor kapcsolatát az Einstein-egyenletek fejezik

ki. Ezek levezetése kézenfekvő fizikai analógiák segítségével lehetséges: mezőelmélet-ről lévén szó, olyan Lagrange-sűrűséget keresünk, melyben a térmennyiség (a metrikus tenzor) legfeljebb első deriváltjai szerepelnek, és ami - négyesdivergencia alakú additív tagok erejéig - skalárral ekvivalens. A kapott Lagrange-sűrűség a gravitációs mezőt jellemzi, melyhez az anyagi mezők (ill. tömegpontok) Lagrange-sűrűségét hozzá kell adni. Az anyag és a gravitációs mező közötti csatolást az anyagi mezők Lagrange-sűrűségében fellépő metrikus tenzor biztosítja.

Az általános relativitáselmélet alkalmazásai tulajdonképpen az Einstein-egyenletek és az anyag mozgásegyenleteinek egyidejű megoldását jelentik. Mint látni fogjuk, ennek segítségével értelmezhető pl. a Merkúr perihélium-elfordulása, a fénysugarak irányváltozása a Nap mellett, a táguló univerzum és a mikrohullámú háttérsugárzás.

2.2. Példa gyorsuló koordinátarendszerre: egyenletesen forgó koordinátarendszer

Tételezzük fel, hogy inerciarendszerben vagyunk. Tekintsünk egy nagy, R sugarú, egyenletes ω szögsebességgel forgó korongot, úgy, hogy $R\omega < c$ ¹. A forgástengely a korong síkjára merőleges és a középpontján halad keresztül. A korongon megfigyelők tartózkodnak, akik a rendelkezésükre álló méterrudakkal megméri a korong sugarát és kerületét. A korong kerületének és sugarának aránya az inerciarendszerből mérve természetesen 2π lenne, hiszen a távolságok mérése az inerciarendszerben egyidejű téridő-pontok között történik, ami szemléletesen szólva azzal egyenértékű, hogy a forgó korongot leképezzük egy az inerciarendszerbeli körre, majd ez utóbbit végezzük el a méréseket. Más a helyzet a korongon tartózkodó megfigyelők esetében. Az ő méréseik eredményét a speciális relativitáselmélet alapján meg tudjuk jósolni, feltéve, hogy lokálisan a gyorsulásnak nincs hatása a távolságok (és időtartamok) mérésére. Ezt az általános relativitáselméletben minden körülmények között feltételezzük. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy a korong adott pontján mérést végző megfigyelő ugyanazt az eredményt kapja akkor is, ha az adott pont kerületi sebességével mozgó inerciarendszerben tartózkodik, és nem gyorsul együtt a koronggal. Ez esetben nyilvánvaló, hogy a kerület mentén elhelyezett méterrudak Lorentz-kontrakciót szenvednek, vagyis az inerciarendszerből nézve $\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}$ arányban megrövidülnek, míg a sugárirányban elhelyezett méterrudak hossza változatlan. Az inerciarendszerbeli megfigyelők tehát azt látják, hogy a $2\pi R$ kerületet a korongon dolgozó megfigyelők hosszabbnak, $2\pi R/\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}$ -nek találják, míg a sugarat továbbra is R -nek mérik. De ez azt jelenti, hogy a korongon a kör kerületének és sugarának aránya nem 2π , hanem az annál nagyobb $2\pi/\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}$ érték. Gyorsuló koordinátarendszerekben a geometria tehát általában nem-euklideszi ill. a téridő nem-Minkowski.

¹Az R és ω mennyiségeket az inerciarendszerből, a forgó korongon mérjük.

Joggal vethető fel a kérdés, hogy a korong kerülete miért nem szenved Lorentz-kontrakciót. A válasz az, hogy azt a korong anyagában fellépő rugalmas deformációk éppen kiegyenlítik. Ilyen deformációk nem lépnek fel a méterrudakban. Mi történik, ha a korongot olyan erős anyagból készítjük, ami ellenáll a deformációnak? Ez esetben nem tudjuk megpörgetni, ugyanis a $D(\Delta\ell)^2/2$ rugalmas energia végtelenhez tart (D az effektív rugóállandó, $\Delta\ell$ a deformáció). Ezekből a megfontolásokból látható, hogy anyagi testekkel megvalósított gyorsuló koordinátarendszerben általában rugalmas deformációk ill. feszültségek lépnek fel.

Az is felvetődhet, hogy nem kapnánk-e más eredményt, ha más módszerrel mérnénk a távolságot. A válasz nemleges, ugyanis a távolság mérése inerciarendszerben végzett távolságméréssel egyenértékű, ott pedig a távolságok a mérési eljárástól elvben nem függenek.

Vizsgáljuk meg a két közeli téridő-pont közötti ívelemnégyszetet! Az inerciarendszerben legyenek a koordináta-differenciálok derékszögű térbeli koordináták esetén dx' , dy' , dz' és dt' , illetve hengerkoordinátákat használva dr' , $d\varphi'$, dz' és dt' ! Az ívelemnégyszet nyilván

$$ds^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2 dt'^2 - dr'^2 - r'^2 d\varphi'^2 - dz'^2 . \quad (2.1)$$

A korong vonatkoztatási rendszerébe térjünk át a

$$\begin{aligned} t' &= t \\ r' &= r \\ \varphi' &= \varphi + \omega t \\ z' &= z \end{aligned} \quad (2.2)$$

koordinátatranszformációval. Ez biztosítja, hogy a konstans vesszőtlen koordinátájú pontok együtt mozognak a koronggal. Ekkor (2.1)-ből azt kapjuk, hogy

$$ds^2 = (c^2 - r^2\omega^2) dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2 - 2r^2\omega d\varphi dt . \quad (2.3)$$

Feltételeztük az ívelemnégyszet invarianciáját, akárcsak a speciális relativitáselméletben. Ott az ívelemnégyszet kifejezése is változatlan maradt, itt viszont megváltozott. Nyilvánvaló, hogy tetszőleges általános koordinátatranszformáció esetén is igaz lesz, hogy az ívelemnégyszet a koordinátadifferenciálok kvadratikus alakja:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k . \quad (2.4)$$

A g_{ik} kétindexes mennyiséget metrikus tenzornak nevezzük. Az előbbi példában $x^0 = ct$,

$x^1 = r$, $x^2 = \varphi$ és $x^3 = z$ esetén a metrikus tenzor nullától különböző komponensei

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - r^2\omega^2/c^2 \\ g_{11} &= g_{33} = -1 \\ g_{22} &= -r^2 \\ g_{02} &= g_{20} = -r^2\omega/c. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Matematikai szempontból a metrikus tenzor 4×4 -es szimmetrikus mátrix (az esetleges antiszimmetrikus rész ui. az ívelemnégyzet kifejezéséből kiesik és így nincs fizikai tartalma). A mátrix sajátértékei előjelének - a szignatúrának - kiemelt jelentősége van. Ha nem három negatív és egy pozitív van közöttük, akkor az a metrika nem felelhet meg valódi fizikai téridőnek, mivel lokálisan nem lehet Minkowski-alakra transzformálni. A (2.5) metrika sajátértékei között valóban mindig három negatív és két pozitív van, ugyanis a metrika blokkdiagonális, és a $g_{11} = -1$, $g_{33} = -1$ elemek egyben sajátértékek is, a maradék g_{00} , g_{22} , g_{02} és g_{20} elemekből álló blokk determinánsa pedig $-r^2$, tehát a maradék két sajátérték ellentétes előjelű.²

2.3. Görbevonali koordináták

Az általános relativitáselméletben görbevonali koordinátákat kell használnunk, mivel egyrészt nem-euklideszi geometria esetében nem vezethetők be derékszögű koordináták, másrészt az elmélet egyik legfontosabb célkitűzése, hogy tetszőleges koordinátarendszerben is megfogalmazható legyen. A fenti példához hasonlóan induljunk ki a

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \tag{2.6}$$

Minkowski-metrikából, és térjünk át tetszőleges görbevonali koordinátákra (gyorsuló koordinátarendszerre) a

$$x'^i = x'^i(x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{2.7}$$

képletekkel, ahol a vesszős koordinátákat a vesszőtlenek (általában nemlineáris) függvényének tekintjük. A koordinátatranszformációt tehát négy darab négyváltozós függvény adja meg. A koordinátadifferenciálokra a többváltozós függvények differenciálási szabálya alapján azt kapjuk, hogy

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j, \tag{2.8}$$

²A sajátértékek formális felírását megelőzően célszerű minden koordinátát azonos dimenziójúvá tenni (pl. a $x^2 = \varphi c/\omega$ új definícióval).

ahol a kétszer előforduló indexekre összegzés értendő. Ezt beírva az ívelemnégyszet képletébe, a

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (2.9)$$

kvadratikus alak adódik, ahol a g_{ik} metrikus tenzort a

$$g_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} g_{lm}^{(0)} \quad (2.10)$$

képlet határozza meg, ahol $g_{lm}^{(0)} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ a Minkowski-metrikának megfelelő metrikus tenzor. Mivel a transzformáció általában nemlineáris, a g_{ik} metrikus tenzor komponensei téridő-pontról téridő-pontra változnak, azaz függnnek a koordinátáktól. A (2.10) képlet megfordítva azt jelenti, hogy gyorsuló koordinátarendszerekből alkalmas koordinátatranszformációval a téridő minden pontjában a metrikus tenzor egyidejűleg a Minkowski-metrikára transzformálható. Ez a tulajdonság tömegek által keltett gravitációs terekben már nem érvényes, semmilyen koordinátatranszformációval nem hozható mindenütt egyidejűleg sík (Minkowski) alakra a metrika. Emiatt ilyenkor görbült téridőről beszélünk, hiszen a nem-Minkowski alak nem pusztán a választott koordinátarendszer, hanem a téridő tulajdonsága. Hogy általános esetben a metrikus tenzort nem lehet mindenütt Minkowski-alakra transzformálni, már abból is nyilvánvaló, hogy a szimmetrikus 4×4 -es metrikus tenzornak tíz független eleme van, melyek a téridő függvényei, de az általános koordinátatranszformációban csak négy függvény szerepel.

A (2.10) képlet megfordításával a vesszős koordinátarendszer-beli metrikus tenzor kifejezése

$$g'_{lm} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} g_{ik} . \quad (2.11)$$

Látható, hogy a metrikus tenzor indexei másképpen transzformálódnak, mint a koordinátadifferenciálok. Vizsgáljuk meg, hogyan transzformálódik egy $\Phi(\{x^i\})$ skalárfüggvény gradiense! A közvetett függvény deriválási szabálya szerint azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} , \quad (2.12)$$

A koordinátadifferenciálok homogén lineáris transzformációs szabálya szerint transzformálódó mennyiségeket a továbbiakban kontravariáns vektoroknak nevezzük, a skalár gradiensének (szintén homogén lineáris) transzformációs szabálya szerint transzformálódó mennyiségeket pedig kovariáns vektornak. A transzformációs szabályt az index pozíciójával jelezzük: a felső index kontravariáns, az alsó index kovariáns vektorkomponensként transzformálódó mennyiséget jelent. Látható, hogy a metrikus tenzor indexei egyenként kovariáns vektorként transzformálódnak. Általában tenzornak nevezzük majd

olyan többindexes mennyiségeket, amelyek kontravariáns és/vagy kovariáns vektorkomponensek szorzataként transzformálódnak. A kétféle transzformációs szabály együtt-hatómátrixai éppen egymás inverzei, emiatt egy kovariáns és egy kontravariáns vektor szorzata az indexeket összeajtva (azaz egyenlővé téve és az egyenlő indexre összegezve) skalárt eredményez:

$$A^i B'_i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} A^k \frac{\partial x^n}{\partial x'^i} B_n = A^k B_k . \quad (2.13)$$

Tenzorok esetén egy kovariáns és egy kontravariáns index összeajtása a tenzor rendjét kettővel csökkenti.

Egy A^i kontravariáns vektort a kovariáns g_{ik} metrikus tenzorral megszorozva és indexét annak egyik indexével összeajtva kovariáns vektort kapunk, amit A_i -vel jelölünk, mivel ugyanannak a fizikai mennyiségnek a kovariáns változata:

$$A_i = g_{ik} A^k . \quad (2.14)$$

Fordítva, egy kovariáns vektort g_{ik} inverzével szorozva indexösszeajtással kontravariáns vektort kapunk. A metrikus tenzor inverzét g^{ik} -val jelöljük és kontravariáns metrikus tenzornak nevezzük:

$$A^i = g^{ik} A_k , \quad (2.15)$$

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i . \quad (2.16)$$

A kovariánsból kontravariáns mennyiség előállítását röviden az index felhúzásának, a fordított műveletet az index lehúzásának fogjuk hívni.

2.4. Távolságok és időtartamok, mérhető mennyiségek

Általános görbevonallú koordinátarendszerben a koordináták csupán az események tér-időbeli helyzetét határozzák meg, de különbségeik nem felelnek meg valódi távolságoknak ill. időtartamoknak. Ez önmagában nem meglepő, hiszen ez a helyzet pl. térbeli polárkoordináták használatakor is. Felmerül tehát a kérdés, hogy a metrika ismeretében hogyan határozható meg két közeli esemény valódi távolsága ill. a tér adott pontjában végbemenő két esemény között eltelt valódi időtartam. Általánosabban felvethető az a kérdés, hogy mi a kapcsolat a tényleges, mérhető fizikai mennyiségek és a leírásukra használt vektor vagy tenzorkomponensek között.

A megoldás alapja ugyanaz, amit már a forgó korongon végzett méréseknél is hangsúlyoztam: a koordinátarendszer adott pontjában áttérünk egy olyan inerciarendszerre,

ami a görbevonallú koordinátarendszer adott pontjával az adott pillanatban együtt mozog, és minden mérhető mennyiséget ebben az érintőtérben értelmezzük. Távolságok és időtartamok mérésekor nem egy, hanem két közeli pontról (eseményről) van szó, azonban a leírt konstrukcióban a másik pont sebessége az inerciarendszerhez képest másodrendben kicsi (a koordinátakülönbségek négyzetével arányos).

2.4.1. A tér adott pontjában bekövetkezett két közeli esemény között eltelt idő

A két esemény a leírt konstrukcióval felvett inerciarendszerben is azonos helyen van, így a közöttük eltelt valódi $d\tau$ idővel az ívelemnégyszet

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 \quad (2.17)$$

alakban fejezhető ki. A görbevonallú koordinátarendszerben a két esemény közötti ívelemnégyszet ugyanennyi, viszont a görbevonallú koordinátákkal fejezhető ki:

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2, \quad (2.18)$$

ugyanis a térbeli koordináták különbségei eltűnnek ($dx^\alpha = 0$). A két kifejezés egyenlőségéből

$$d\tau = \frac{\sqrt{g_{00}}}{c} dx^0 \quad (2.19)$$

adódik.

2.4.2. Két közeli esemény valódi térbeli távolsága

Áttérünk az inerciarendszerre, melyben az egyidejűség fogalma jól meghatározott, mivel az idő egyformán telik a különböző térbeli pontokban. Ez azt jelenti, hogy olyan konstans együtthatós, homogén lineáris transzformációt alkalmazunk, ami a kiszemelt téridőpontban Minkowski-alakra hozza a metrikát. Ezenkívül, hogy az inerciarendszer ne mozogjon a görbevonallú koordinátarendszerhez képest, megköveteljük, hogy az inerciarendszerbeli dx'^α térbeli koordinátadifferenciálok ne függjenek dx^0 -tól. Ekkor ugyanis $dx^\alpha = 0$ -ból $dx'^\alpha = 0$ következik (és viszont), tehát az egyik rendszerben rögzített térbeli pont a másikban is helyben marad. Ez annyit jelent matematikailag, hogy a koordinátadifferenciálok transzformációs képlete

$$dx'^\alpha = A_\beta^\alpha dx^\beta \quad (2.20)$$

$$dx'^0 = A_j^0 dx^j. \quad (2.21)$$

A görög betűk a térbeli (1,2,3), a latin betűk a téridőbeli (0,1,2,3) indexeken futnak végig. Az ívelemnégyzet

$$ds^2 = (dx'^0)^2 - (dx'^\alpha)^2 = A_j^0 A_k^0 dx^j dx^k - A_\beta^\alpha A_\nu^\alpha dx^\beta dx^\nu . \quad (2.22)$$

Ez természetesen meg kell, hogy egyezzen a $g_{jk} dx^j dx^k$ kifejezéssel. A térszerű és időszzerű indexek szétválasztásával ez azt jelenti, hogy

$$g_{00} = (A_0^0)^2 \quad (2.23)$$

$$g_{0\alpha} = A_0^0 A_\alpha^0 \quad (2.24)$$

$$g_{\beta\nu} = A_\beta^0 A_\nu^0 - A_\beta^\alpha A_\nu^\alpha . \quad (2.25)$$

Az első egyenletből

$$A_0^0 = \sqrt{g_{00}} , \quad (2.26)$$

a másodikból pedig

$$A_\alpha^0 = \frac{g_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} \quad (2.27)$$

adódik. Két közeli pont $d\ell$ távolságának mérésekor az inerciarendszerben egyidejű pontokat vizsgálunk, vagyis megköveteljük, hogy $dx'^0 = 0$ legyen, ezért egyrészt

$$ds^2 = - (d\ell)^2 \quad (2.28)$$

írható, másrészt megkapjuk az egyidejűség feltételét a görbevonali koordinátarendszerben:

$$dx'^0 = A_j^0 dx^j = 0 . \quad (2.29)$$

Ebbe a transzformáció mátrixát behelyettesítve kapjuk, hogy

$$dx^0 = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha . \quad (2.30)$$

Két közeli esemény tehát akkor egyidejű, ha időkoordinátáik különbségére ez az egyenlet teljesül. Az egyidejűség feltételének megadását szokás szemléletesen az órák szinkronizálásának nevezni. Az eljárást folytatva további pontokra definiálható az események egyidejűsége, így egy görbe mentén is. Az viszont már általában nem igaz, hogy zárt görbe mentén az órák szinkronizálása elvégezhető, ugyanis a kezdőpontba visszatérve véges időkoordináta-különbség adódik. Más szavakkal, két véges távolságban levő pont egyidejűsége nem definiálható egyértelműen, mivel az órák szinkronizálásának eredménye

általában függ attól, hogy a két pont között milyen pálya mentén végeztük el a szinkronizálást. Ez a helyzet például a forgó koordinátarendszer esetén: az origó középpontú kör mentén szinkronizálva az órákat nulla helyett

$$\Delta x^0 = - \oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha = \frac{2\pi R^2 \omega c}{c^2 - R^2 \omega^2} \quad (2.31)$$

adódik. Ez a tulajdonság nem a téridő, hanem a választott koordinátarendszer tulajdonsága. Nyilvánvaló, hogy a négy transzformációs függvény (vagyis a koordinátarendszer) alkalmas megválasztásával általában a téridő minden pontjában nullává tehető a három $g_{0\alpha}$ mennyiség, sőt még az is elérhető, hogy ezzel egyidejűleg minden téridő-pontban $g_{00} = 1$ is teljesüljön. Az ilyen koordinátarendszert, melyben az egyidejűség a teljes tér-időben egyértelműen definiálható, szinkronizált vonatkoztatási rendszernek, az x^0 idő-koordinátát, melynek különbsége az adott térbeli pontban eltelt valódi idővel egyenlő, világidőnek nevezzük.³

Visszatérve a közeli pontok valódi távolságához, a (2.28) és (2.30) képletekből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (dl)^2 &= -ds^2 = -g_{00} (dx^0)^2 - 2g_{0\alpha} dx^0 dx^\alpha - g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= \left(\frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} - g_{\alpha\beta} \right) dx^\alpha dx^\beta . \end{aligned} \quad (2.32)$$

A

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} - g_{\alpha\beta} \quad (2.33)$$

mennyiség tehát a térbeli metrikát határozza meg. Érdekesség, hogy ez éppen a $-g^{\alpha\beta}$ 3×3 -as mátrix (a kontravariáns metrikus tenzor térszerű részének ellentettje) inverze.

A forgó koordinátarendszer (2.5) téridő-metrikájának segítségével a forgó korong térbeli metrikájának nullától különböző komponenseire a

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= 1 \\ \gamma_{22} &= \frac{r^2}{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}} \\ \gamma_{33} &= 1 \end{aligned} \quad (2.34)$$

értékeket kapjuk. Ennek megfelelően a sugárirányú valódi távolság a korong közepétől a pereméig R , míg a perem mentén mérve a valódi kerület $2\pi R / \sqrt{1 - R^2 \omega^2 / c^2}$, a korábbi eredménnyel egyezően.

³Az előbbi állítást annyiban pontosítanunk kell, hogy szinkronizált vonatkoztatási rendszerben a világidő valamilyen véges értékénél a metrika szükségképpen szingulárisává válik, azon túl (pozitív vagy negatív időirányban) a koordinátarendszer nem alkalmazható.

2.4.3. Valódi (mérhető) fizikai mennyiségek

Valamely lokális fizikai mennyiséget, amely lehet skalár, vektor, tenzor, az elméletben tetszőleges görbevonalú komponenseivel megadhatunk, az indexeket a metrikus tenzorral ill. inverzével le- és felhúzzhatjuk. Természetes módon merül fel a kérdés, hogy mi felel meg a ténylegesen mérhető értékeknek. A válasz azt, hogy a (2.20), (2.21) képletekkel - mivel ez egyben a kontravariáns vektorkomponensek transzformációs szabálya is -, vagy ennek inverzével (kovariáns vektorok esetében), vagy ezek szorzatával (tenzorok esetén) inerciarendszerbe képezzük le a kérdéses fizikai mennyiséget, és eredményül a ténylegesen mérhető értéket kapjuk. A transzformáció megadásához szükségünk van az eddig még nem meghatározott A_β^α mennyiségekre is. A megadott feltételek alapján ez nem egyértelmű, ami azzal kapcsolatos, hogy az inerciarendszer x, y, z térszerű koordinátatengelyeit még tetszőleges forgatásnak lehet alávetni. Az (2.25), (2.33) egyenletekből ugyanis

$$A_\beta^\alpha A_\nu^\alpha = \gamma_{\beta\nu} \quad (2.35)$$

adódik, aminek a megoldása

$$A_\beta^\alpha = F_\nu^\alpha \sqrt{\lambda_\nu} O_\beta^\nu, \quad (2.36)$$

ahol F_ν^α tetszőleges 3×3 -as ortogonális mátrix (forgásmátrix), λ_ν a $\gamma_{\alpha\beta}$ pozitív definit, valós szimmetrikus mátrix ν -edik sajátértéke, O_β^ν pedig a hozzátartozó sajátvektor, melyek összessége szintén 3×3 -as ortogonális mátrixot alkot.

Fejezzük ki pl. egy forgó korongon mozgó tömegpont sebességét koordinátáinak időderiváltjaival! Jelöljük a t szerinti deriváltakat \dot{r} , $\dot{\varphi}$ és \dot{z} -tal! Először a négyessebességet írjuk fel, ami definíció szerint $u^i = dx^i/ds$, azaz

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r^2(\dot{\varphi} + \omega)^2}{c^2} - \frac{\dot{z}^2}{c^2}}} \quad (2.37)$$

$$u^1 = \frac{dx^1}{ds} = \frac{\dot{r}}{c\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r^2(\dot{\varphi} + \omega)^2}{c^2} - \frac{\dot{z}^2}{c^2}}} \quad (2.38)$$

$$u^2 = \frac{dx^2}{ds} = \frac{\dot{\varphi}}{c\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r^2(\dot{\varphi} + \omega)^2}{c^2} - \frac{\dot{z}^2}{c^2}}} \quad (2.39)$$

$$u^3 = \frac{dx^3}{ds} = \frac{\dot{z}}{c\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r^2(\dot{\varphi} + \omega)^2}{c^2} - \frac{\dot{z}^2}{c^2}}} \quad (2.40)$$

A (2.20), (2.21), (2.26), (2.27), (2.36) képleteket alkalmazzuk. Mivel a (2.34) térbeli metrika máris diagonális, az O_β^ν mátrix az egységmátrix, a λ_ν értékek pedig a diagonális

elemek. Végül az F_ν^α forgásmátrixot önkényesen egység mátrixnak választjuk. Ekkor az A_β^α transzformációs mátrix diagonális lesz. Mindezeket figyelembevéve a négyessebesség komponenseit

$$u^0 = \frac{dx'^0}{ds} = \frac{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2} - \frac{r^2\omega\dot{\varphi}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r^2(\dot{\varphi}+\omega)^2}{c^2} - \frac{\dot{z}^2}{c^2}}} \quad (2.41)$$

$$u^1 = \frac{dx'^1}{ds} = \frac{\dot{r}}{c\sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2} - \frac{r^2(\dot{\varphi}+\omega)^2}{c^2} - \frac{\dot{z}^2}{c^2}}} \quad (2.42)$$

$$u^2 = \frac{dx'^2}{ds} = \frac{r\dot{\varphi}}{c\sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2} - \frac{r^2(\dot{\varphi}+\omega)^2}{c^2} - \frac{\dot{z}^2}{c^2}}} \quad (2.43)$$

$$u^3 = \frac{dx'^3}{ds} = \frac{\dot{z}}{c\sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2} - \frac{r^2(\dot{\varphi}+\omega)^2}{c^2} - \frac{\dot{z}^2}{c^2}}} \quad (2.44)$$

alakban kapjuk. Ez az elmozdulásokat a tömegpont sajátidejében méri, amint az a négyessebesség esetében szokásos. A hármassebesség komponenseit viszont korongon eltelt valódi időben mérjük, mégpedig a tömegpont pályája mentén szinkronizált órák segítségével. Ez azt jelenti, hogy az eltelt valódi idő nagysága dx^0 időkoordináta-változáskor

$$\sqrt{g_{00}} \left(dx^0 + \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha \right) \quad (2.45)$$

lesz, mivel figyelembe kell vennünk, hogy a másik térbeli pontban a 0 időpont $-\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha$ -val egyidejű. De ez azt jelenti, hogy éppen dx'^0 (v.ö. (2.21)) szerint kell a koordinátákat deriválni. Így viszont a keresett hármassebesség-komponensek

$$v^1 = c \frac{u^1}{u^0} = \frac{\dot{r} \sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}}}{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2} - \frac{r^2\omega\dot{\varphi}}{c^2}} \quad (2.46)$$

$$v^2 = c \frac{u^2}{u^0} = \frac{r\dot{\varphi}}{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2} - \frac{r^2\omega\dot{\varphi}}{c^2}} \quad (2.47)$$

$$v^3 = c \frac{u^3}{u^0} = \frac{\dot{z} \sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}}}{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2} - \frac{r^2\omega\dot{\varphi}}{c^2}} \quad (2.48)$$

3. fejezet

Kovariáns differenciálás

Kovariáns és kontravariáns vektorok görbevonalú koordinátarendszerekben. Tenzorok. Kontravariáns metrikus tenzor. Vektorok eltolása. Christoffel-szimbólumok. Kovariáns differenciálás. Részecske mozgása gravitációs térben. Az elektromágnesség egyenletei gravitációs térben. Fény terjedése gravitációs térben.

Általános koordinátatranszformációk esetén a vektorok transzformációs szabálya minden pontban különböző. Ennek következtében egy vektortér deriváltja, mivel adott pontban két különböző pontbeli érték különbsége, nem alkot vektort. Ez a transzformációs szabály deriválásakor nyilvánvaló, mivel a helyfüggő együtthatók deriváltja extra tagot eredményez.

Ahhoz, hogy a tenzorként transzformálódó általánosítást megkapjuk, azonos pontbeli vektorokat kell egymásból kivonni, tehát az x^i és $x^i + dx^i$ pontokban levő vektorok valamelyikét - pl. az x^i pontban lévőt - a másik pontba kell párhuzamosan eltolni.

3.1. Párhuzamos eltolás

Ezzel a vektorok görbült térbeli párhuzamos eltolásának problémájához jutottunk. A már alkalmazott módszert fogjuk kiterjeszteni: nem csak egy pontban, hanem egy kis környezetben definiáljuk a görbe vonalú koordinátarendszerről az inerciarendszerre való áttérést. Utóbbiban derékszögű koordinátákat használva párhuzamos eltoláskor a vektor-komponensek változatlanok. Ezután az eltolás végpontjában visszatérünk a görbevonalú koordinátákra, és eredményül megkapjuk a párhuzamosan eltolt vektort görbevonalú koordinátarendszerben.

Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a kiválasztott pont, melyből az eltolást kezdjük, a görbevonalú koordinátarendszer és az inerciarendszer közös origója. Ekkor a

korábbi formuláink kiterjesztésével írhatjuk, hogy

$$x'^i = A_j^i x^j + \frac{1}{2} B_{jk}^i x^j x^k + \mathcal{O}\left((x^j)^3\right) \quad (3.1)$$

Itt x^j -k a gravitációs térbeli görbevonali koordináták, míg x'^i -k az inerciarendszerbeli derékszögű koordináták. Nyilvánvalóan a B_{jk}^i konstans együttthatók alsó indexeikben szimmetrikusak. A koordinátadifferenciálokra azt kapjuk, hogy

$$dx'^i = A_j^i dx^j + B_{jk}^i x^j dx^k + \mathcal{O}\left((x^j)^2\right) \quad (3.2)$$

Ebből az ívelemnégyzet

$$ds^2 = (dx'^0)^2 - (dx'^\alpha)^2 = (A_j^0 A_k^0 + A_j^0 B_{nk}^0 x^n + A_k^0 B_{nj}^0 x^n) dx^j dx^k \quad (3.3)$$

$$- (A_j^\alpha A_k^\alpha + A_j^\alpha B_{nk}^\alpha x^n + A_k^\alpha B_{nj}^\alpha x^n) dx^j dx^k \quad (3.4)$$

$$= \left(g_{jk}(0) + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^n} x^n \right) dx^j dx^k \quad (3.5)$$

Itt a jobboldalon a metrikus tenzort az origó körül elsőrendig sorbafejtettük. Ebből a korábbi összefüggéseken túl

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^n} = A_j^0 B_{nk}^0 + A_k^0 B_{nj}^0 - A_j^\alpha B_{nk}^\alpha - A_k^\alpha B_{nj}^\alpha \quad (3.6)$$

következik. Könnyen belátható, hogy az egyenletek és az ismeretlen B_{jk}^i együttthatók száma megegyezik.¹ A B_{jk}^i együttthatók meghatározása céljából vezessük be a

$$b_{jnk} = A_j^0 B_{nk}^0 - A_j^\alpha B_{nk}^\alpha \quad (3.7)$$

jelölést. A b_{jnk} mennyiségek az n, k indexekben szimmetrikusak. Ezzel

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^n} = b_{jnk} + b_{knj} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial g_{kn}}{\partial x^j} = b_{kjn} + b_{njk} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial g_{nj}}{\partial x^k} = b_{nkj} + b_{jkn} \quad (3.10)$$

A második és a harmadik egyenlet az elsőből következik az indexek ciklikus cseréjével. Az első két egyenlet összegéből levonva a harmadikat

$$b_{kjn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{nj}}{\partial x^k} \right) \quad (3.11)$$

¹A sorfejtés következő rendjében ez már nem teljesül, ami összhangban van azzal, hogy tetszőleges metrika esetén a teljes téridőt nem lehet egyidejűleg Minkowski-alakra transzformálni.

adódik. Ezt az A_j^i mátrix inverzével balról szorozva megkapjuk a keresett együtthatókat.

A párhuzamos eltolást a korábban mondottak szerint végezzük el: a kontravariáns dx^j vektorra $x^j = 0$ esetén alkalmazzuk a (3.2) képletet. A kapott dx'^i komponensek nem változnak meg párhuzamos eltoláskor. Végezetül a (3.2) képlet inverzével térünk vissza a görbevonallú komponensekre, de ezúttal nullától különböző x^j -k mellett, amelyek éppen az eltolás mértékét fejezik ki a görbevonallú koordinátarendszerben. Hogy a levezetést egyszerűsítsük, eszközöljünk annyi változtatást, hogy a 0 és x^j pontok helyett (az eltolás előtti és utáni pontok) használjuk a $-x^j$ és 0 pontokat. Mivel x^j -t végig kis mennyiségnek feltételeztük, ez a változtatás nem befolyásolja az eredményt, viszont a (3.2) képlet invertálása az eltolás végpontjában kényelmesebben elvégezhető. Ekkor ugyanis a

$$dx'^i = A_j^i d\tilde{x}^j \quad (3.12)$$

egyenletből kell a vesszőtlen koordinátákat a vesszősekkel kifejezni. A hullámvonal az eltolás utáni komponenseket jelöli. Mivel

$$A_j^0 A_k^0 - A_j^\alpha A_k^\alpha = g_{jk} , \quad (3.13)$$

azt kapjuk, hogy

$$A_k^0 dx'^0 - A_k^\alpha dx'^\alpha = g_{kj} d\tilde{x}^j , \quad (3.14)$$

amiből a g^{jk} inverz mátrixszal szorozva adódik, hogy

$$d\tilde{x}^j = g^{jk} (A_k^0 dx'^0 - A_k^\alpha dx'^\alpha) . \quad (3.15)$$

Itt a dx'^i mennyiségeket a leírtaknak megfelelően a (3.2) képlet $x^j \rightarrow -x^j$ cserével kapott alakjából kell behelyettesíteni:

$$d\tilde{x}^j = g^{jk} (A_k^0 A_l^0 dx^l - A_k^\alpha A_l^\alpha dx^l - A_k^0 B_{nl}^0 x^n dx^l + A_k^\alpha B_{nl}^\alpha x^n dx^l) \quad (3.16)$$

$$= g^{jk} g_{kl} dx^l - g^{jk} b_{knl} x^n dx^l \quad (3.17)$$

$$= dx^j - \frac{1}{2} g^{jk} \left(\frac{\partial g_{kn}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^k} \right) x^n dx^l \quad (3.18)$$

Ennek megfelelően egy tetszőleges C^j kontravariáns vektor komponenseinek változása végtelen kis δx^n párhuzamos eltolás esetében

$$\delta C^j = -\frac{1}{2} g^{jk} \left(\frac{\partial g_{kn}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^k} \right) C^l \delta x^n . \quad (3.19)$$

A metrikus tenzornak és deriváltjainak itt fellépő kombinációja a Γ_{nl}^j -nel jelölt Christoffel-szimbólum:

$$\Gamma_{nl}^j = \frac{1}{2} g^{jk} \left(\frac{\partial g_{kn}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^k} \right) , \quad (3.20)$$

amivel

$$\delta C^j = -\Gamma_{nl}^j C^l \delta x^n . \quad (3.21)$$

Látható, hogy a Christoffel-szimbólumok az alsó indexekben szimmetrikusak. Fontos hangsúlyozni, hogy a Christoffel-szimbólumok nem alkotnak tenzort, mivel pl. Minkowski-metrika esetén azonosan eltűnnek. A transzformáció homogén lineáris jellege miatt viszont ha egy tenzor egy koordináta-rendszerben eltűnik, akkor minden más koordináta-rendszerben is eltűnik.

Megjegyezzük, hogy az eddigiekből (v.ö. (3.7), (3.11), (3.13), (3.20)) egyszerű számítással következik, hogy

$$B_{jk}^i = A_n^i \Gamma_{jk}^n . \quad (3.22)$$

Kovariáns vektor komponenseinek megváltozását abból vezethetjük le, hogy egy kontravariáns és egy kovariáns vektor szorzata skalár, ami az eltolás következtében nem változik meg:

$$0 = \delta (D_j C^j) = D_j \delta C^j + C^j \delta D_j = -D_j \Gamma_{nl}^j C^l \delta x^n + C^l \delta D_l . \quad (3.23)$$

Mivel ez tetszőleges kontravariáns C^l vektor esetén fennáll, következik, hogy

$$\delta D_l = \Gamma_{nl}^j D_j \delta x^n . \quad (3.24)$$

Tenzorkomponensek párhuzamos eltoláskor fellépő megváltozását annak alapján vezetjük le, hogy a tenzor ilyenkor is megfelelő vektorkomponensek szorzataként viselkedik, amiből az következik, hogy minden kovariáns j indexhez $\delta T_{\dots k \dots}^{j \dots}$ képletében egy $-\Gamma_{nl}^j \delta x^n T_{\dots k \dots}^{l \dots}$ tag tartozik, míg minden kovariáns k indexhez egy $\Gamma_{nk}^l \delta x^n T_{\dots l \dots}^{j \dots}$ tag tartozik. Ez közvetlenül levezethető a vektorkomponensek szorzatára vonatkozó összefüggésből, ha a kis megváltozásokban elsőrendű tagokat összegyűjtjük.

3.2. Kovariáns deriváltak

Miután a párhuzamos eltolást definiáltuk, a korábban mondottaknak megfelelően definiáljuk a kovariáns deriváltat: az $x^i + dx^i$ pontbeli vektorkomponensből az x^i -ből $x^i + dx^i$ -be párhuzamosan eltolt vektorkomponenst (v.ö. (3.21)) vonjuk le. Tehát a kovariáns differenciál

$$DA^j = A^j(x^i + dx^i) - (A^j(x^i) - \Gamma_{ik}^j A^k dx^i) \approx \frac{\partial A^j}{\partial x^i} dx^i + \Gamma_{ik}^j A^k dx^i , \quad (3.25)$$

a kovariáns derivált pedig (x^i szerint)

$$\frac{DA^j}{dx^i} = \frac{\partial A^j}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^j A^k . \quad (3.26)$$

DA^j vektor, DA^j/dx^i pedig vegyes másodrendű tenzor. Ugyanígy kovariáns vektorra (v.ö. (3.24))

$$DA_j = A_j(x^i + dx^i) - (A_j(x^i) + \Gamma_{ij}^k A_k dx^i) \approx \frac{\partial A_j}{\partial x^i} dx^i - \Gamma_{ij}^k A_k dx^i, \quad (3.27)$$

és

$$\frac{DA_j}{dx^i} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^k A_k. \quad (3.28)$$

Tenzorok kovariáns deriváltja a párhuzamos eltolásnál mondottak alapján vezethető le, pl.

$$\frac{DT_j^i}{dx^k} = \frac{\partial T_j^i}{\partial x^k} + \Gamma_{lk}^i T_j^l - \Gamma_{jk}^l T_l^i \quad (3.29)$$

írható vegyes másodrendű tenzor kovariáns deriváltjára.

Szokás az írásmód egyszerűsítése érdekében a parciális deriváltakat indexbe tett vesszővel, a kovariáns deriváltakat pedig indexbe tett pontosvesszővel jelölni:

$$T_{j;k}^i \equiv \frac{\partial T_j^i}{\partial x^k} \quad (3.30)$$

$$T^i_{j;k} \equiv \frac{DT_j^i}{dx^k} \quad (3.31)$$

A metrikus tenzor kovariáns deriváltja nulla. Ez azonnal következik abból, hogy

$$DA_i = g_{ik} DA^k = D(g_{ik} A^k) = A^k Dg_{ik} + g_{ik} DA^k, \quad (3.32)$$

de természetesen közvetlen számolással is belátható:

$$Dg_{ik} = g_{ik,n} dx^n - \Gamma_{in}^l g_{lk} dx^n - \Gamma_{kn}^l g_{il} dx^n \quad (3.33)$$

$$= g_{ik,n} dx^n - \frac{1}{2} (g_{ik,n} + g_{kn,i} - g_{in,k}) dx^n - \frac{1}{2} (g_{ik,n} + g_{in,k} - g_{kn,i}) dx^n \equiv 0. \quad (3.34)$$

3.3. Erőmentes gömbszimmetrikus pörgettyű precessziója

A párhuzamos eltolásra ill. a kovariáns deriválás alkalmazására példa a stacionárius gravitációs mezőben² nyugvó erőmentes gömbszimmetrikus pörgettyű precessziója.³ Forgatónyomaték hiányában a pörgettyűvel pillanatnyilag együttmozgó inerciarendszerben

²Vagyis a választott görbevonalú koordináta-rendszerben a metrikus tenzor komponensei nem függenek az időtől.

³Ha a pörgettyű nem lenne gömbszimmetrikus, inhomogén gravitációs térben már klasszikus közelítésben is forgatónyomaték lépne fel.

a pörgettyű tengelyének helyvektora változatlan. Ez azt jelenti, hogy a görbevonali koordinátarendszerben a pörgettyű tengelyét időirányú párhuzamos eltolásnak vetjük alá. Ehhez szükséges a helyvektort négyesvektorra kiegészíteni, úgy, hogy a tengely két végpontját egyidőben tekintjük, és a két közeli esemény különbségét képezzük. Az egyidejűség a (2.30) időkoordináta-különbséggel egyenértékű. Legyen a helyvektor n^α , ekkor a négyesvektor időkomponense $n^0 = -(g_{0\alpha}/g_{00})n^\alpha$. A tengely δx^0 idő alatti megváltozása az eddigiek szerint

$$\delta n^\alpha = -\Gamma_{k0}^\alpha n^k \delta x^0, \quad (3.35)$$

ami egyenértékű az $n_{;0}^\alpha = 0$ feltétellel, az idő szerinti kovariáns derivált eltűnésével.⁴ Ez annak az általános szabálynak az egyik esete (ld. a következő fejezetet), mely szerint a Minkowski-rendszerben érvényes tenzoriális összefüggéseket úgy lehet görbevonali koordinátákra ill. görbült téridőbe átírni, hogy az előforduló deriváltakat kovariáns deriváltakra cseréljük. Végző soron a helyvektor időbeli változására a

$$\frac{dn^\alpha}{dx^0} = \left(-\Gamma_{\beta 0}^\alpha + \Gamma_{00}^\alpha \frac{g_{0\beta}}{g_{00}} \right) n^\beta \quad (3.36)$$

egyenletet kapjuk. Alkalmazzuk ezt a forgó koordinátarendszer esetére!

A metrikát (2.5) adja. A Christoffel-szimbólumok (3.20) kifejezését kiértékelve azt kapjuk, hogy a nullától különböző komponensek a következők:

$$\Gamma_{00}^1 = -r\omega^2/c^2 \quad (3.37)$$

$$\Gamma_{20}^1 = \Gamma_{02}^1 = -r\omega/c \quad (3.38)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r \quad (3.39)$$

$$\Gamma_{10}^2 = \Gamma_{01}^2 = \omega/(cr) \quad (3.40)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 1/r \quad (3.41)$$

Ennek segítségével a (3.36) egyenletek az

$$\dot{n}^1 = \frac{r\omega}{1 - r^2\omega^2/c^2} n^2 \quad (3.42)$$

$$\dot{n}^2 = -\frac{\omega}{r} n^1 \quad (3.43)$$

$$\dot{n}^3 = 0 \quad (3.44)$$

alakot öltik (a pont a t idő szerinti deriválást jelenti). Ha bevezetjük (2.34) és (2.36) alapján a ténylegesen mérhető

$$n_r = n^1 \quad (3.45)$$

$$n_\varphi = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2}} n^2 \quad (3.46)$$

$$n_z = n^3 \quad (3.47)$$

⁴Az időbeli komponensre vonatkozó $n_{;0}^0 = 0$ egyenlet szintén teljesül.

vektorkomponenseket, akkor azt kapjuk, hogy

$$\dot{n}_r = \frac{\omega}{\sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2}} n_\varphi \quad (3.48)$$

$$\dot{n}_\varphi = -\frac{\omega}{\sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2}} n_r \quad (3.49)$$

$$\dot{n}_z = 0, \quad (3.50)$$

ahonnan látható, hogy a pörgettyű tengelye $\omega/\sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2}$ szögsebességgel visszafelé precesszál abban a derékszögű koordinátarendszerben, melynek egyik tengelye a közép-ponttól sugárirányban kifelé mutat. Ennek megfelelően a $2\pi/\omega$ periódusidő alatt a pörgettyű tengelyének vetülete a forgásiránnyal ellentétesen $2\pi(1/\sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2} - 1)$ szöggel mozdul el, tehát a pörgettyű $-\omega(1/\sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2} - 1)$ szögsebességgel precesszál. Az $r\omega \ll c$ határesetben ez közelítőleg $-r^2\omega^3/(2c^2)$ -tel egyenlő. Ez a speciális relativitáselméletből jól ismert Thomas-precesszió, az erőmentes pörgettyű tengelyirányának változása körmozgás során. A levezetés végén kihasználtuk, hogy a t koordinátaidő annak az inerciarendszernek az időkoordinátájával egyezik meg, melynek origója a forgó koordinátarendszerével egybeesik, a precesszió szögsebessége tehát ebben a koordinátarendszerben értendő.

A (3.36) képletből látható, hogy sztatikus gravitációs mezőben nyugvó pörgettyű esetén, amikor a metrikus tenzor komponensei nem csupán időtől függetlenek, hanem a $g_{0\alpha}$ komponensek el is tűnnek, nem lép fel precesszió. Ezek a komponensek azonban nullától különbözőek forgó gömbszimmetrikus test gravitációs mezejében (ld. a 11. fejezetben), és a precesszió ebben az esetben valóban fel is lép. Ennek kísérleti kimutatása (Gravity Probe B kísérlet) az általános relativitáselmélet helyességének egyik fontos bizonyítéka (ld. 13. fejezet).

4. fejezet

A fizikai törvények görbült tér-időben

Részecske mozgása gravitációs térben.

A legkisebb hatás elve:

$$\delta S = -mc\delta \int ds = 0 \quad (4.1)$$

Mozgásegyenlet:

$$\frac{Du^i}{Ds} = 0 \quad (4.2)$$

(ahol $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ a négyessebesség), azaz

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0 \quad (4.3)$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet

$$p^i = mcu^i \quad (4.4)$$

$$p_i p^i = m^2 c^2 \quad (4.5)$$

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 c^2 = 0 \quad (4.6)$$

Fény terjedése

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kl} k^k k^l = 0 \quad (4.7)$$

Gyenge gravitációs tér

Nemrelativisztikus Lagrange-függvény:

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi \quad (4.8)$$

$$ds^2 = (c^2 + 2\varphi)dt^2 - d\mathbf{r}^2 \quad (4.9)$$

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \quad (4.10)$$

Állandó gravitációs tér, gravitációs vöröseltolódás
Sajátidőben mért frekvencia:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right) \quad (4.11)$$

$$\Delta\omega = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} \omega \quad (4.12)$$

Az elektromágnesség egyenletei gravitációs térben.

Térerősségtenzor:

$$F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \quad (4.13)$$

Négyes áramsűrűség:

$$j^i = \frac{\rho c}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx^i}{dx^0} \quad (4.14)$$

Maxwell-egyenletek:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0 \quad (4.15)$$

$$F_{;k}^{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} F^{ik}) = -\frac{j^i}{\epsilon_0 c^2} \quad (4.16)$$

Töltött részecske mozgása elektromágneses és gravitációs erőterben:

$$m \left(\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl} u^k u^l \right) = q F^{ik} u_k \quad (4.17)$$

5. fejezet

Görbületi tenzor

Vektor eltolása zárt görbe mentén. Görbületi tenzor. A görbületi tenzor szimmetriái. Bianchi-azonosság. Weil-tenzor, Ricci-tenzor, skalár görbület. Példa: görbületi tenzor számítása görbült kétdimenziós felületen. Független tenzorkomponensek száma kettő, három és négy dimenzióban.

5.1. A görbületi tenzor (Riemann-tenzor)

Kérdés: milyen lokális mennyiség jelzi, hogy görbült a téridő?

Vektor párhuzamos eltolása: a komponensek lokálisan Minkowski téridőben változatlanok. Tetszőleges téridőben:

$$DA^i = 0 \tag{5.1}$$

Geodetikus ($Du^i = 0$) mentén végzett párhuzamos eltolás során a pálya érintőjével (u^i) bezárt szög állandó.

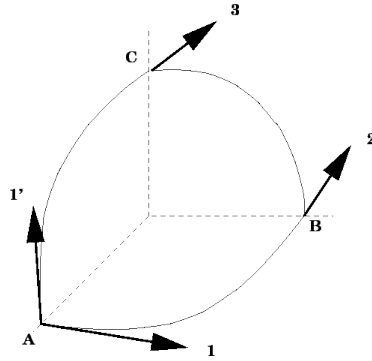
Párhuzamos eltolás zárt görbe mentén

$$\Delta A_k = \oint \Gamma^i_{kl} A_i dx^l \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma^n_{il} A_n \tag{5.3}$$

Stokes tétele:

$$\oint A_i dx^i = \int df^{ki} \frac{\partial A^i}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \int df^{ki} \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} - \frac{\partial A^k}{\partial x^i} \right) \tag{5.4}$$



5.1. ábra. Görbült felületen szakaszonként geodetikus zárt görbe mentén végzett párhuzamos eltolás eredménye nem egyezik meg a kiindulási vektorral.

ahol

$$df^{ki} = dx^{(1)k} dx^{(2)i} - dx^{(1)i} dx^{(2)k} \quad (5.5)$$

a $dx^{(1)i}$ és $dx^{(2)i}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe.

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (\Gamma^i_{km} A_i)}{\partial x^l} - \frac{\partial (\Gamma^i_{kl} A_i)}{\partial x^m} \right] \Delta f^{lm} \quad (5.6)$$

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \mathcal{R}^i_{klm} A_i \Delta f^{lm} \quad (5.7)$$

$$\mathcal{R}^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl} \Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm} \Gamma^n_{kl} \quad (5.8)$$

A Riemann-tenzor kifejezése a Christoffel-szimbólumokkal:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^i_{klm} A_i &= \frac{\partial (\Gamma^i_{km} A_i)}{\partial x^l} - \frac{\partial (\Gamma^i_{kl} A_i)}{\partial x^m} \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} \right) A_i + \Gamma^i_{km} \Gamma^n_{il} A_n - \Gamma^i_{kl} \Gamma^n_{im} A_n \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^n_{km} \Gamma^i_{nl} - \Gamma^n_{kl} \Gamma^i_{nm} \right) A_i \end{aligned} \quad (5.9)$$

Felhasználtuk, hogy

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma^n_{il} A_n \quad (5.10)$$

A fenti levezetés tetszőleges A_i vektorra érvényes, ezért

$$\mathcal{R}^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^n_{km} \Gamma^i_{nl} - \Gamma^n_{kl} \Gamma^i_{nm} \quad (5.11)$$

5.2. A görbületi tenzor tulajdonságai

Kontravariáns vektor megváltozása végtelen kis zárt görbe mentén

$$\Delta A^k = -\frac{1}{2} \mathcal{R}^k_{ilm} A^i \Delta f^{lm} \quad (5.12)$$

Bizonyítás.

$$\Delta (A^k B_k) = 0 \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \Delta (A^k B_k) &= B_k \Delta A^k + A^k \Delta B_k \\ &= B_k \Delta A^k + A^k \frac{1}{2} \mathcal{R}^i_{klm} B_i \Delta f^{lm} \\ &= B_k \left(\Delta A^k + A^i \frac{1}{2} \mathcal{R}^k_{ilm} \Delta f^{lm} \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Mivel B_k tetszőleges,

$$\Delta A^k = -\frac{1}{2} \mathcal{R}^k_{ilm} A^i \Delta f^{lm} \quad (5.15)$$

A különböző sorrendben vett vegyes másodrendű kovariáns deriváltak különbsége arányos a Riemann-tenzorral I.

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = A_m \mathcal{R}^m_{ikl} \quad (5.16)$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
A_{i;k;l} &= A_{i;k,l} - \Gamma_{il}^n A_{n;k} - \Gamma_{kl}^n A_{i;n} \\
&= A_{i;k,l} - \frac{\partial}{\partial x^l} (\Gamma_{ik}^n A_n) - \Gamma_{il}^n A_{n,k} + \Gamma_{il}^n \Gamma_{nk}^m A_m - \Gamma_{kl}^n A_{i,n} + \Gamma_{kl}^n \Gamma_{in}^m A_m \\
&= A_{i;k,l} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^n}{\partial x^l} A_n - \Gamma_{ik}^n A_{n,l} - \Gamma_{il}^n A_{n,k} - \Gamma_{kl}^n A_{i,n} + \Gamma_{il}^n \Gamma_{nk}^m A_m + \Gamma_{kl}^n \Gamma_{in}^m A_m
\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
A_{i;l;k} &= A_{i,l,k} - \frac{\partial \Gamma_{il}^n}{\partial x^k} A_n - \Gamma_{il}^n A_{n,k} - \Gamma_{ik}^n A_{n,l} - \Gamma_{lk}^n A_{i,n} + \Gamma_{ik}^n \Gamma_{nl}^m A_m + \Gamma_{lk}^n \Gamma_{in}^m A_m \\
A_{i;k;l} - A_{i;l;k} &= \left(\frac{\partial \Gamma_{il}^m}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial x^l} + \Gamma_{il}^n \Gamma_{nk}^m - \Gamma_{ik}^n \Gamma_{nl}^m \right) A_m \\
&= \mathcal{R}_{ikl}^m A_m
\end{aligned} \tag{5.18}$$

A különböző sorrendben vett vegyes másodrendű kovariáns deriváltak különbsége arányos a Riemann-tenzorial II.

$$A_{;k;l}^i - A_{;l;k}^i = -A^m \mathcal{R}_{mkl}^i \tag{5.19}$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
A_{;k;l}^i &= A_{;k,l}^i + \Gamma_{nl}^i A_{;k}^n - \Gamma_{kl}^n A_{;n}^i \\
&= A_{;k,l}^i + \frac{\partial}{\partial x^l} (\Gamma_{nk}^i A^n) + \Gamma_{nl}^i A_{;k}^n + \Gamma_{nl}^i \Gamma_{mk}^n A^m - \Gamma_{kl}^n A_{;n}^i - \Gamma_{kl}^n \Gamma_{mn}^i A^m \\
&= A_{;k,l}^i + \frac{\partial \Gamma_{nk}^i}{\partial x^l} A^n + \Gamma_{nk}^i A_{;l}^n + \Gamma_{nl}^i A_{;k}^n + \Gamma_{nl}^i \Gamma_{mk}^n A^m - \Gamma_{kl}^n A_{;n}^i - \Gamma_{kl}^n \Gamma_{mn}^i A^m
\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$A_{;l;k}^i = A_{;l,k}^i + \frac{\partial \Gamma_{nl}^i}{\partial x^k} A^n + \Gamma_{nl}^i A_{;k}^n + \Gamma_{nk}^i A_{;l}^n + \Gamma_{nk}^i \Gamma_{ml}^n A^m - \Gamma_{lk}^n A_{;n}^i - \Gamma_{lk}^n \Gamma_{mn}^i A^m \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
A_{;k;l}^i - A_{;l;k}^i &= - \left(\frac{\partial \Gamma_{ml}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{mk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{nk}^i \Gamma_{ml}^n - \Gamma_{nl}^i \Gamma_{mk}^n \right) A^m \\
&= -\mathcal{R}_{mkl}^i A^m
\end{aligned} \tag{5.22}$$

A görbületi tenzor szimmetriatulajdonságai

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{iklm} = g_{in}\mathcal{R}^n{}_{klm} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) \\ &+ g_{np} (\Gamma_{kl}^n \Gamma_{im}^p - \Gamma_{km}^n \Gamma_{il}^p)\end{aligned}\quad (5.23)$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{iklm} = g_{in}\mathcal{R}^n{}_{klm} &= g_{in} \left(\frac{\partial \Gamma_{km}^n}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^n}{\partial x^m} + \Gamma_{pl}^n \Gamma_{km}^p - \Gamma_{pm}^n \Gamma_{kl}^p \right) \\ &= \frac{\partial \Gamma_{ikm}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{ikl}}{\partial x^m} - \Gamma_{km}^n g_{in,l} + \Gamma_{kl}^n g_{in,m} + g_{in} (\Gamma_{pl}^n \Gamma_{km}^p - \Gamma_{pm}^n \Gamma_{kl}^p)\end{aligned}\quad (5.24)$$

$$\Gamma_{ikm} = \frac{1}{2} (g_{ik,m} + g_{im,k} - g_{km,i}) \quad (5.25)$$

$$\Gamma_{ikl} = \frac{1}{2} (g_{ik,l} + g_{il,k} - g_{kl,i}) \quad (5.26)$$

$$g_{in,l} = \Gamma_{il}^p g_{pn} + \Gamma_{nl}^p g_{ip} \quad (5.27)$$

$$g_{in,m} = \Gamma_{im}^p g_{pn} + \Gamma_{nm}^p g_{ip} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{iklm} &= \frac{1}{2} (g_{ik,ml} + g_{im,kl} - g_{km,il} - g_{ik,lm} - g_{il,km} + g_{kl,im}) \\ &- \Gamma_{km}^n \Gamma_{il}^p g_{pn} - \Gamma_{km}^n \Gamma_{nl}^p g_{ip} + \Gamma_{kl}^n \Gamma_{im}^p g_{pn} + \Gamma_{kl}^n \Gamma_{nm}^p g_{ip} \\ &+ g_{in} (\Gamma_{pl}^n \Gamma_{km}^p - \Gamma_{pm}^n \Gamma_{kl}^p)\end{aligned}\quad (5.29)$$

Azaz

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{iklm} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} \right) \\ &+ g_{pn} (\Gamma_{kl}^n \Gamma_{im}^p - \Gamma_{km}^n \Gamma_{il}^p)\end{aligned}\quad (5.30)$$

Antiszimmetria a első ill. a második indexpáron belüli cserékre

$$\mathcal{R}_{iklm} = -\mathcal{R}_{kilm} = -\mathcal{R}_{ikml} \quad (5.31)$$

Szimmetria a első és a második indexpár cseréjére

$$\mathcal{R}_{iklm} = \mathcal{R}_{lmik} \quad (5.32)$$

Bármely három indexre képzett ciklikus összeg eltűnik

$$\mathcal{R}_{iklm} + \mathcal{R}_{imkl} + \mathcal{R}_{ilmk} = 0 \quad (5.33)$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{iklm} + \mathcal{R}_{imkl} + \mathcal{R}_{ilmk} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^m \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^m \partial x^l} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{lm}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^l \partial x^k} \right) \\ &+ g_{pn} (\Gamma_{kl}^n \Gamma_{im}^p - \Gamma_{km}^n \Gamma_{il}^p) \\ &+ g_{pn} (\Gamma_{mk}^n \Gamma_{il}^p - \Gamma_{ml}^n \Gamma_{ik}^p) \\ &+ g_{pn} (\Gamma_{lm}^n \Gamma_{ik}^p - \Gamma_{lk}^n \Gamma_{im}^p) = 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Ricci-tenzor

$$\mathcal{R}_{ik} = g^{lm} \mathcal{R}_{limk} = \mathcal{R}_{imk}^m \quad (5.35)$$

$$\mathcal{R}_{ik} = \mathcal{R}_{ki} \quad (5.36)$$

Invariáns görbület (Ricci-skalár)

$$\mathcal{R} = g^{ik} \mathcal{R}_{ik} \quad (5.37)$$

Kétdimenziós eset

$$\mathcal{R} = \frac{2\mathcal{R}_{1212}}{\gamma} \quad (5.38)$$

$$\frac{\mathcal{R}}{2} = K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \quad (5.39)$$

ahol ρ_1 és ρ_2 a fő görbületi sugarakat jelöli.

Bizonyítás. Háromdimenziós euklideszi tér kétdimenziós felületének adott P pontjában vegyünk fel derékszögű koordinátarendszert a következőképpen:

- a P pont az origó
- a z tengely a felület normálisának irányába mutat
- az xz és yz síkok a fő görbületi síkok. □

Ekkor a felület egyenlete az origó kis környezetében

$$z = \frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2} . \quad (5.40)$$

A felület metrikáját két közeli, a felületen levő pont távolságából vezetjük le:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{xdx}{\rho_1} + \frac{ydy}{\rho_2} \right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{x^2}{\rho_1^2} \right) dx^2 + \left(1 + \frac{y^2}{\rho_2^2} \right) dy^2 + 2\frac{xy}{\rho_1\rho_2} dx dy , \end{aligned} \quad (5.41)$$

tehát

$$g_{11} = 1 + \frac{x^2}{\rho_1^2} , \quad (5.42)$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{xy}{\rho_1\rho_2} , \quad (5.43)$$

$$g_{22} = 1 + \frac{y^2}{\rho_2^2} . \quad (5.44)$$

Az origóban az első deriváltak eltűnnek, és maga a metrika ott az egységmátrixszal egyenlő. Az origóban a (5.23) képletet alkalmazva kapjuk:

$$\mathcal{R}_{1212}(0) = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho_1\rho_2} . \quad (5.45)$$

Bianchi-azonosság

$$\mathcal{R}^n_{ikl;m} + \mathcal{R}^n_{imk;l} + \mathcal{R}^n_{ilm;k} = 0 \quad (5.46)$$

Bizonyítás.

$$\mathcal{R}^n_{ikl;m} + \mathcal{R}^n_{imk;l} + \mathcal{R}^n_{ilm;k} = \frac{1}{2} \mathcal{R}^n_{ikl;m} E^{klmp} \sqrt{-g} \quad (5.47)$$

Ahol

$$E^{klmp} = \frac{1}{\sqrt{-g}} e^{klmp} \quad (5.48)$$

A kérdéses ciklikus összeg $1/\sqrt{-g}$ -szerese tehát tenzor. Áttérhetünk ezért lokálisan geodetikus rendszerre (ha a tenzor ott eltűnik, akkor máshol is):

$$\mathcal{R}^n_{ikl;m} = \frac{\partial \mathcal{R}^n_{ikl}}{\partial x^m} = \frac{\partial^2 \Gamma^n_{il}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma^n_{ik}}{\partial x^m \partial x^l} \quad (5.49)$$

Ezzel

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^n_{ikl;m} + \mathcal{R}^n_{imk;l} + \mathcal{R}^n_{ilm;k} &= \frac{\partial^2 \Gamma^n_{il}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma^n_{ik}}{\partial x^m \partial x^l} \\ &+ \frac{\partial^2 \Gamma^n_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} - \frac{\partial^2 \Gamma^n_{im}}{\partial x^l \partial x^k} \\ &+ \frac{\partial^2 \Gamma^n_{im}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 \Gamma^n_{il}}{\partial x^k \partial x^m} = 0 \end{aligned} \quad (5.50)$$

A Bianci-azonosságból indexösszejtéssel (i -t k -val, n -et l -lel) kapjuk:

$$0 = g^{ik} (\mathcal{R}^l_{ikl;m} + \mathcal{R}^l_{imk;l} + \mathcal{R}^l_{ilm;k}) = -\mathcal{R}_{,m} + 2\mathcal{R}^l_{m;l} \quad (5.51)$$

vagy

$$\mathcal{R}^l_{m;l} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x^m} \quad (5.52)$$

5.2.1. A görbületi tenzor független komponenseinek száma

Kétdimenziós eset:

egyetlen független komponens, pl. \mathcal{R}_{1212} .

Háromdimenziós eset:

$\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ első ($\alpha\beta$) és második ($\gamma\delta$) indexpárjai három-három értéket vehetnek fel, tehát a független komponensek megegyeznek egy szimmetrikus 3×3 -as mátrix komponenseinek számával, azaz 6-tal. (A ciklikus összeg automatikusan eltűnik.)

Négydimenziós eset:

\mathcal{R}_{iklm} első (ik) és második (lm) indexpárjai hat-hat értéket vehetnek fel. Egy 6×6 -os szimmetrikus mátrix független komponenseinek száma 21. A ciklikus összeg csak akkor nem tűnik el automatikusan, ha mind a négy index különböző, ezért egyetlen további összefüggést ad a komponensek között. Négy dimenzióban tehát a görbületi tenzor független komponenseinek száma 20.

5.2.2. Weil-tenzor:

$$C_{iklm} = \mathcal{R}_{iklm} - \frac{1}{2}\mathcal{R}_{il}g_{km} + \frac{1}{2}\mathcal{R}_{im}g_{kl} + \frac{1}{2}\mathcal{R}_{kl}g_{im} - \frac{1}{2}\mathcal{R}_{km}g_{il} + \frac{1}{6}\mathcal{R}(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl}) \quad (5.53)$$

Rendelkezik a görbületi tenzor minden algebrai szimmetriájával, de bármely indexpárját összeajtva nullát kapunk (irreducibilis tenzor).

6. fejezet

A gravitációs tér hatásintegrálja

Klasszikus mezőelméleti emlékeztető. Hatás, Lagrange-sűrűség, Euler-Lagrange mozgásegyenlet, megmaradási tételek. Energia-impulzus tenzor és határozatlansága. Az impulzusmomentum megmaradása. A gravitációs erőter hatásintegrálja.

6.1. Klasszikus mezőelméleti emlékeztető

$q(x, y, z, t)$: térmennyiség (pl. elektromágneses térerősség komponense, metrikus tenzor komponense)

$\Lambda(q, q_i)$: Lagrange-sűrűség (a térmennyiségektől és azok koordináták szerinti ill. időderiváltjától függ, itt $q_i = \frac{\partial q}{\partial x^i}$)

$$S = \int \Lambda(q, q_i) d\Omega \quad (6.1)$$

$$(d\Omega = c dV dt)$$

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_i} \delta q_i \right] d\Omega = \int \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_i} \delta q \right) - \delta q \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_i} \right] d\Omega = 0 \quad (6.2)$$

Euler-Lagrange-egyenlet (mozgásegyenlet):

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_i} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0 \quad (6.3)$$

Energia- és impulzusmegmaradás:

Mivel a Lagrange-sűrűség nem függ expliciten a koordinátáktól és az időtől,

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,k}}{\partial x^i} \quad (6.4)$$

A mozgásegyenletet felhasználva:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} q_{,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} q_{,k,i} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(q_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \right) \quad (6.5)$$

Nullára redukálva:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(q_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} - \delta_i^k \Lambda \right) = 0 \quad (6.6)$$

Energia-impulzus-tenzor:

$$T_i^k = q_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} - \delta_i^k \Lambda \quad (6.7)$$

A $\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0$ kontinuitási egyenletet a t_1 és t_2 időpontok közötti négyestérfogatra integráljuk:

$$\frac{dP^i}{dt} = 0 \quad (6.8)$$

ahol

$$P^i = \int T^{ik} dS_k \quad (6.9)$$

a megmaradó négyesimpulzus.

T^{ik} határozatlan:

$$T^{ik} + \frac{\partial}{\partial x^l} \psi^{ikl} \quad (6.10)$$

is kielégíti a kontinuitási egyenletet, ha $\psi^{ikl} = -\psi^{ilk}$. A megmaradó négyesimpulzus értékét ez nem befolyásolja, mivel

$$\int \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^l} dS_k = \frac{1}{2} \int \left(dS_k \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^l} - dS_l \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} \int \psi^{ikl} df_{kl}^* = 0 \quad (6.11)$$

ahol $df_{kl}^* = \epsilon_{klmn} df^{mn}$ a $df^{mn} = dx^{(1)m} dx^{(2)n} - dx^{(1)n} dx^{(2)m}$ négyes felületelem duálisa. A végtelen távoli felületen az integrandus eltűnik.

Az impulzusmomentum megmaradása (skalár térre):

Az impulzusmomentum négyestenzora:

$$J^{ik} = \int (x^i dP^k - x^k dP^i) = \int (x^i T^{kl} - x^k T^{il}) dS_l \quad (6.12)$$

Az impulzusmomentum megmaradása ekvivalens az impulzusmomentum-sűrűség négyesdivergenciájának eltűnésével:

$$0 = J^{ik}(t_2) - J^{ik}(t_1) = \oint (x^i T^{kl} - x^k T^{il}) dS_l = \int \frac{\partial}{\partial x^l} (x^i T^{kl} - x^k T^{il}) d\Omega \quad (6.13)$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x^l} (x^i T^{kl} - x^k T^{il}) = 0 \quad (6.14)$$

De

$$\frac{\partial}{\partial x^l} (x^i T^{kl} - x^k T^{il}) = x^i \frac{\partial T^{kl}}{\partial x^l} - x^k \frac{\partial T^{il}}{\partial x^l} + \delta_l^i T^{kl} - \delta_l^k T^{il} = T^{ki} - T^{ik} \quad (6.15)$$

tehát az impulzusmomentum megmaradásából T^{ki} szimmetrikussága következik.

6.2. Előkészítés (néhány fontos azonosság levezetése)

Determináns deriváltja:

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \epsilon^{i_0 i_1 i_2 i_3} g_{0i_0} g_{1i_1} g_{2i_2} g_{3i_3} = \epsilon^{i_0 i_1 i_2 i_3} \frac{\partial g_{0i_0}}{\partial x^k} g_{1i_1} g_{2i_2} g_{3i_3} + \dots \quad (6.16)$$

$\frac{\partial g_{0i_0}}{\partial x^k}$ együtthatója

$$\epsilon^{i_0 i_1 i_2 i_3} g_{1i_1} g_{2i_2} g_{3i_3} \quad (6.17)$$

a 0. sorhoz és i_0 -ik oszlophoz tartozó előjeles aldetermináns, azaz g^{0i_0} . (Hasonlóan a további tagokra.) Ezzel

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = g g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \quad (6.18)$$

Mivel
 $g_{ij}g^{ij} = \delta_j^j = 4$,

$$g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = -g_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} \quad (6.19)$$

A Christoffel-szimbólum definíciója,

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) \quad (6.20)$$

alapján

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m} \right) = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} \quad (6.21)$$

Vektor kovariáns négyesdivergenciája:

$$A_{;i}^i \equiv \frac{DA^i}{Dx^i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ki}^i A^k = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} A^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} A^i)}{\partial x^i} \quad (6.22)$$

6.3. A gravitációs erőter hatásintegrálja

A gravitációs tér egyenletei a fizika más ágaiból nem vezethetők le (új fizikai törvények, 1916). Csupán analógiák használhatók motivációként: másodrendű téregyenleteket várnunk (első deriváltak a Lagrange-sűrűségben), a Lagrange-sűrűség skalár, térmennyiségek: a metrikus tenzor komponensei.

Probléma: A metrikus tenzor első deriváltjaiból (Christoffel-szimbólumokból) nem képezhető skalár, a rendelkezésre álló egyetlen nemtriviális skalár mennyiség, a skalár görbület (\mathcal{R}) viszont második deriváltakat is tartalmaz. Megoldás: mivel \mathcal{R} a második deriváltakat csak lineárisan tartalmazza, megmutatjuk, hogy

$$\int \mathcal{R} \sqrt{-g} d\Omega = \int G \sqrt{-g} d\Omega + \int \frac{\partial (\sqrt{-g} w^i)}{\partial x^i} d\Omega \quad (6.23)$$

ahol G csak a metrikus tenzor első deriváltjait tartalmazza. (A w^i mennyiség nem transzformálódik vektorként!). Tekintsük ehhez $\mathcal{R}\sqrt{-g}$ kifejezésében a másodrendű deriváltakat tartalmazó tagokat:

$$\mathcal{R}\sqrt{-g} = \sqrt{-g} g^{ki} R_{kmi}^m = \sqrt{-g} g^{ki} \left(\frac{\partial \Gamma_{ki}^m}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma_{km}^m}{\partial x^i} + \Gamma_{nm}^m \Gamma_{ki}^n - \Gamma_{ni}^m \Gamma_{km}^n \right) \quad (6.24)$$

Második deriváltak csak a Christoffel-szimbólumok deriváltjaiban szerepelnek. Ezeket a tagokat tovább alakítva:

$$\sqrt{-g} \left(g^{km} \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^i} - g^{ki} \frac{\partial \Gamma_{km}^m}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{-g} [g^{km} \Gamma_{km}^i - g^{ki} \Gamma_{km}^m] \right) \quad (6.25)$$

$$- \left(\Gamma_{km}^i \frac{\partial (\sqrt{-g} g^{km})}{\partial x^i} - \Gamma_{km}^m \frac{\partial (\sqrt{-g} g^{ki})}{\partial x^i} \right) \quad (6.26)$$

Tehát

$$w^i = g^{km} \Gamma_{km}^i - g^{ki} \Gamma_{km}^m \quad (6.27)$$

és

$$G = g^{ki} (\Gamma_{nm}^m \Gamma_{ki}^n - \Gamma_{ni}^m \Gamma_{km}^n) + \frac{\Gamma_{km}^m}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} g^{ki})}{\partial x^i} - \frac{\Gamma_{km}^i}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} g^{km})}{\partial x^i} \quad (6.28)$$

A metrikus tenzor deriváltjait kifejezzük a Christoffel szimbólumokkal ($g_{,l}^{ik} = 0$):

$$\frac{\partial g^{im}}{\partial x^l} = -\Gamma_{kl}^i g^{km} - \Gamma_{kl}^m g^{ik} \quad (6.29)$$

Kapjuk:

$$G = g^{ki} (\Gamma_{nm}^m \Gamma_{ki}^n - \Gamma_{ni}^m \Gamma_{km}^n) + \Gamma_{km}^m \Gamma_{in}^n g^{ki} - \Gamma_{km}^m \Gamma_{ni}^i g^{nk} - \Gamma_{km}^m \Gamma_{ni}^k g^{in} \quad (6.30)$$

$$\underline{-\Gamma_{km}^i \Gamma_{in}^n g^{km}} + \Gamma_{km}^i \Gamma_{ni}^k g^{nm} + \underline{\Gamma_{km}^i \Gamma_{ni}^m g^{kn}} \quad (6.31)$$

Tehát

$$G = g^{ki} (\Gamma_{ni}^m \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^m \Gamma_{ki}^n) \quad (6.32)$$

A Lagrange-sűrűség

$$-\frac{c^3}{16\pi k} \mathcal{R} \sqrt{-g} \quad (6.33)$$

A negatív előjel biztosítja, hogy a hatás pozitív definit legyen. $k = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ a gravitációs állandó.

7. fejezet

Energia-impulzus-tenzor

Új levezetést adunk az energia-impulzus-tenzorra, amely azonnal szimmetrikus T_{ik} -t eredményez

Gondolatmenet:

- Végtelen kis általános koordinátatranszformációt végzünk.
- Ennek következtében az anyag hatásfüggvénye (mivel a Lagrange-sűrűség skalár) nem változhat, $\delta S = 0$.
- Formálisan felírjuk a hatás koordinátatranszformációból eredő megváltozását és egyenlővé tesszük nullával.
- Az anyagot jellemző térmennyiségek (pl. elektromágneses térerősségtenzor) kielégítik a mozgásegyenleteket, így a koordinátatranszformációból eredő megváltozásuk a hatás kifejezésében első rendben nem ad járulékot.
- Csak a metrika megváltozása eredményez nemtriviális változást. Eredmény: egy szimmetrikus tenzor (T_{ik}) kovariáns négyesdivergenciája nulla. (Ez most nem jelenti automatikusan megmaradó mennyiség létezését!)

$$S = \frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g} d\Omega \quad (7.1)$$

Infinitezimális koordinátatranszformáció:

$$x'^i = x^i + \xi^i \quad (7.2)$$

(ξ^i kicsi)

$$dx'^i = dx^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} dx^l = \left(\delta_l^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} \right) dx^l \quad (7.3)$$

$$g'^{ik}(x'^l) = g^{mn}(x^l) \left(\delta_m^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} \right) \left(\delta_n^k + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^n} \right) \approx g^{ik}(x^l) + g^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kn} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^n} \quad (7.4)$$

Átalakítjuk a baloldalt:

$$g'^{ik}(x'^l) = g'^{ik}(x^l + \xi^l) = g'^{ik}(x^l) + \frac{\partial g'^{ik}}{\partial x^l} \xi^l \approx g'^{ik}(x^l) + \frac{\partial g'^{ik}}{\partial x^l} \xi^l \quad (7.5)$$

Végül tehát

$$g'^{ik}(x^l) = g^{ik}(x^l) - \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \xi^l + g^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kn} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^n} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \xi^{i;k} + \xi^{k;i} &= g^{kn} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^n} + g^{km} \Gamma_{ml}^i \xi^l + g^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{im} \Gamma_{ml}^k \xi^l \\ &= g^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kn} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^n} + (g^{km} g^{in} + g^{im} g^{kn}) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{nm}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^n} \right) \xi^l \\ &= g^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kn} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^n} + g^{km} g^{in} \frac{\partial g_{nm}}{\partial x^l} \xi^l = g^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kn} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^n} - g^{km} g_{nm} \frac{\partial g^{in}}{\partial x^l} \xi^l \\ &= g^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kn} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^n} - \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \xi^l \end{aligned} \quad (7.7)$$

Tehát

$$g'^{ik}(x^l) = g^{ik}(x^l) + \delta g^{ik}(x^l), \quad \delta g^{ik} = \xi^{i;k} + \xi^{k;i} \quad (7.8)$$

Hasonlóan (mivel $g'^{ik} g'_{kl} = \delta_l^i$)

$$g'_{ik}(x^l) = g_{ik}(x^l) + \delta g_{ik}(x^l), \quad \delta g_{ik} = -\xi_{i;k} - \xi_{k;i} \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} + \frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)} \delta \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right) \right\} d\Omega \\
&= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)} \right) \right\} \delta g^{ik} d\Omega
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Legyen

$$T_{ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)} \right) \right\} \tag{7.11}$$

(Szimmetrikus!)
Ekkor

$$\delta S = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega \tag{7.12}$$

δg^{ik} kifejezését behelyettesítve:

$$\delta S = \frac{1}{2c} \int T_{ik} (\xi^{i;k} + \xi^{k;i}) \sqrt{-g} d\Omega \tag{7.13}$$

Másképpen:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{c} \int T_{ik} \xi^{i;k} \sqrt{-g} d\Omega = \frac{1}{c} \int T_i^k \xi_{;k}^i \sqrt{-g} d\Omega \\
&= \frac{1}{c} \int (T_i^k \xi^i)_{;k} \sqrt{-g} d\Omega - \frac{1}{c} \int \xi^i T_{i;k}^k \sqrt{-g} d\Omega
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Az első tagban felhasználjuk a vektorok kovariáns négyesdivergenciájára vonatkozó azonosságot. Kapjuk:

$$\int (T_i^k \xi^i)_{;k} \sqrt{-g} d\Omega = \int \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} T_i^k \xi^i) d\Omega \tag{7.15}$$

Ezt a négydimenziós Gauss-tétel segítségével átalakítva nullát kapunk.

Marad:

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \xi^i T_{i;k}^k \sqrt{-g} d\Omega \quad (7.16)$$

Mivel ξ^i tetszőleges,

$$T_{i;k}^k = 0 \quad (7.17)$$

következik. Ez sík téridőben az energia-impulzus-tenzor kontinuitási egyenletével azonos alakú.

7.1. Példák energia-impulzus tenzorra:

7.1.1. Elektromágneses tér

Lagrange-sűrűség ($\sqrt{-g}$ nélkül):

$$\Lambda = -\frac{\epsilon_0}{4} F_{ik} F^{ik} \quad (7.18)$$

Energia-impulzus-tenzor:

$$T_{ik} = \epsilon_0 \left(-F_{il} F_k^l + \frac{1}{4} F_{lm} F^{lm} g_{ik} \right) \quad (7.19)$$

7.1.2. Makroszkopikus anyag (por, gáz, folyadék stb.)

$$T_{ik} = (p + \epsilon) u_i u_k - p g_{ik} \quad (7.20)$$

Itt p a nyomás, ϵ az energiasűrűség (térfogategységre eső energia), u^i pedig az anyag négyessebbsége.

8. fejezet

Einstein-egyenletek

Variációs elv:

$$\delta(S_g + S_m) = 0 \quad (8.1)$$

A metrikus tenzor komponensei szerint variálunk.

$$\begin{aligned} \delta S_g &\propto \delta \int \mathcal{R} \sqrt{-g} d\Omega = \delta \int g^{ik} \mathcal{R}_{ik} \sqrt{-g} d\Omega \\ &= \int (\mathcal{R}_{ik} \sqrt{-g} \delta g^{ik} + g^{ik} \mathcal{R}_{ik} \delta \sqrt{-g} + g^{ik} \sqrt{-g} \delta \mathcal{R}_{ik}) d\Omega \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ik} \delta g^{ik} \quad (8.3)$$

$$\delta \int R \sqrt{-g} d\Omega = \int \left(\mathcal{R}_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) \delta g^{ik} d\Omega + \int g^{ik} \delta \mathcal{R}_{ik} \sqrt{-g} d\Omega \quad (8.4)$$

Megmutatjuk, hogy a második tag eltűnik:

$\delta \Gamma_{il}^k A_k dx^l$ vektor, mert azonos pontokban levő vektorok különbsége. Eszerint $\delta \Gamma_{il}^k$ tenzor.

Lokálisan geodetikus rendszerben számolunk. Ekkor a metrikus tenzor első deriváltjai eltűnnek.

$$g^{ik} \delta \mathcal{R}_{ik} = g^{ik} \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x^k} \delta \Gamma_{il}^l \right) = \frac{\partial w^l}{\partial x^l} \quad (8.5)$$

ahol

$$w^l = g^{ik} \delta \Gamma_{ik}^l - g^{il} \delta \Gamma_{ik}^k \quad (8.6)$$

Általános esetben tehát

$$g^{ik} \delta \mathcal{R}_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} w^l)}{\partial x^l} \quad (8.7)$$

A Gauss-tételt alkalmazva bizonyítjuk az eredeti állítást.
Tehát

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int \left(\mathcal{R}_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \mathcal{R} \right) \delta g^{ik} d\Omega \quad (8.8)$$

Az anyag hatásintegráljának variációja (ld. az energia-impulzus-tenzor levezetését):

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega \quad (8.9)$$

Végül tehát a teljes variáció:

$$-\frac{c^3}{16\pi k} \int \left(\mathcal{R}_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \mathcal{R} - \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} \right) \delta g^{ik} d\Omega \quad (8.10)$$

amiből megkapjuk az Einstein-egyenleteket:

$$\mathcal{R}_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \mathcal{R} = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} \quad (8.11)$$

Másképpen:

$$\mathcal{R}_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k \mathcal{R} = \frac{8\pi k}{c^4} T_i^k \quad (8.12)$$

Az indexeket összeajtva:

$$\mathcal{R} = -\frac{8\pi k}{c^4} T \quad (8.13)$$

Ezért írhatjuk:

$$\mathcal{R}_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4} \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right) \quad (8.14)$$

Az Einstein-egyenletek nemlineáris, másodrendű parciális differenciálegyenletek. Csak a metrikus tenzor térszerű komponenseinek fordul elő bennük a második időderiváltja, és az is csak az \dots_{β}^{α} típusú térszerű indexeket tartalmazó egyenletben. A másik négy egyenlet csak első időderiváltakat tartalmaz, ezek tehát kényszerekként értelmezhetők. Az anyag és gravitációs tér kezdeti értékei emiatt nem adhatók meg függetlenül. Összesen nyolc független kezdeti feltétel adható meg, ezek közül négy az anyagot jellemzi (pl. a négyessebesség komponensei), négy pedig a szabad gravitációs teret (két független polarizáció, amplitudók és időderiváltjuk). Az anyag mozgásegyenlete következik az Einstein-egyenletekből. Az egyértelmű megoldáshoz az anyag állapotegyenletére is szükség van, ezt az Einstein-egyenletek nem tartalmazzák.

Konzisztencia az energia-impulzus tenzor kovariáns négyesdivergenciájának eltűnésével

Az Einstein-egyenletek levezetéséhez az energia-impulzus tenzor olyan alakját használtuk, amelynek alapvető tulajdonsága volt kovariáns négyesdivergenciájának eltűnése. Megmutatjuk, hogy ez összhangban van az Einstein-egyenletekkel. Az (8.12) egyenlet mindkét oldalának kovariáns négyesdivergenciáját véve

$$\mathcal{R}_{i;k}^k - \frac{1}{2} \mathcal{R}_{,i} = \frac{8\pi k}{c^4} T_{i;k}^k \quad (8.15)$$

adódik. A baloldal a Bianchi-azonosságból következő (5.52) összefüggés miatt eltűnik.

9. fejezet

Megmaradási tételek

Görbült téridőben az energia-impulzus-tenzor a

$$T_{i;k}^k = 0 \quad (9.1)$$

koninuitási egyenletnek tesz eleget, ami felírható

$$T_{i;k}^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (T_i^k \sqrt{-g})}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} T^{kl} = 0 \quad (9.2)$$

alakban. Ebből nem következik megmaradási tétel!

Magyarázat: csak a gravitációs tér és az anyag együttes energiája és impulzusa marad meg.

A megmaradó, teljes négyesimpulzus meghatározása

Az Einstein-egyenletek felhasználásával olyan kifejezést keresünk, amely a gravitációs tér kikapcsolásakor (azaz lokálisan geodetikus rendszerben) az anyag T^{ik} energia-impulzus-tenzorába megy át, térfogati integrálja megmaradó mennyiség, és melynek általános esetben T^{ik} -től való eltérése a metrikának legfeljebb első deriváltjaitól függ.

Lokálisan geodetikus rendszerben számolunk (az adott pontban a metrikus tenzor első deriváltjai ill. a Christoffel-szimbólumok eltűnnek)

Az adott pontban

$$T_{;k}^{ik} = \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0 \quad (9.3)$$

T^{ik} -t az Einstein-egyenletek segítségével

$$T^{ik} = \frac{\partial \eta^{ikl}}{\partial x^l} \quad (9.4)$$

alakra hozzuk (még mindig lokálisan geodetikus rendszerben), ahol

$$\eta^{ikl} = -\eta^{ilk} \quad (9.5)$$

(Ekkor a kontinuitási egyenlet azonosan teljesül.)

Ehhez

kiindulunk az Einstein-egyenletekből:

$$T^{ik} = \frac{c^4}{8\pi k} \left(\mathcal{R}_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \mathcal{R} \right) \quad (9.6)$$

Felhasználjuk, hogy lokálisan geodetikus rendszerben

$$\mathcal{R}^{ik} = \frac{1}{2} g^{im} g^{kp} g^{ln} \left\{ \frac{\partial^2 g_{lp}}{\partial x^m \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^l \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{ln}}{\partial x^m \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^l \partial x^n} \right\} \quad (9.7)$$

Kapjuk:

$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \frac{1}{(-g)} \underbrace{\frac{c^4}{16\pi k} \frac{\partial}{\partial x^m} [(-g) (g^{ik} g^{lm} - g^{il} g^{km})]}_{b^{ikl}} \right\} \quad (9.8)$$

$$b^{ikl} \quad (9.9)$$

$$(\eta^{ikl} = \frac{1}{(-g)} b^{ikl})$$

Lokálisan geodetikus rendszerben

$$T^{ik} = \frac{1}{(-g)} \frac{\partial b^{ikl}}{\partial x^l} \quad (9.10)$$

vagy

$$(-g) T^{ik} = \frac{\partial b^{ikl}}{\partial x^l} \quad (9.11)$$

Visszatérünk általános görbevonallú koordinátákra. Ekkor

$$(-g) (T^{ik} + t^{ik}) = \frac{\partial b^{ikl}}{\partial x^l} \quad (9.12)$$

ahol t^{ik} csak a metrikus tenzor első deriváltjaitól függ. Expliciten (T^{ik} -t ismét a téregyenletből véve):

$$\begin{aligned}
t^{ik} = & \frac{c^4}{16\pi k} \{ (g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm}) (2\Gamma_{lm}^n \Gamma_{np}^p - \Gamma_{lp}^n \Gamma_{mn}^p - \Gamma_{ln}^n \Gamma_{mp}^p) \\
& + g^{il}g^{mn} (\Gamma_{lp}^k \Gamma_{mn}^p + \Gamma_{mn}^k \Gamma_{lp}^p - \Gamma_{np}^k \Gamma_{lm}^p - \Gamma_{lm}^k \Gamma_{np}^p) \\
& + g^{kl}g^{mn} (\Gamma_{lp}^i \Gamma_{mn}^p + \Gamma_{mn}^i \Gamma_{lp}^p - \Gamma_{np}^i \Gamma_{lm}^p - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{np}^p) \\
& + g^{lm}g^{np} (\Gamma_{ln}^i \Gamma_{mp}^k - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{np}^k) \} \quad (9.13)
\end{aligned}$$

t^{ik} a gravitációs tér energia-impulzus pszeudotenzora.

Mivel

$$b^{ikl} = -b^{ilk} \quad (9.14)$$

azonosan teljesül, hogy

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (-g) (T^{ik} + t^{ik}) = 0 \quad (9.15)$$

Emiatt

$$P^i = \frac{1}{c} \int (-g) (T^{ik} + t^{ik}) dS_k \quad (9.16)$$

megmaradó mennyiség. Ez az anyag és a gravitációs tér együttes „négyesimpulzusa”. (Ténylegesen nem négyesvektor, mivel a négyesvektorok a tér különböző pontjaiban különbözőképpen transzformálódnak, P^i pedig egy teljes háromdimenziós hiperfelülethez tartozik.)

Mivel $(-g) (T^{ik} + t^{ik})$ szimmetrikus az i, k indexekben, megmarad a négyes impulzusmomentum:

$$J^{ik} = \int (x^i dP^k - x^k dP^i) = \frac{1}{c} \int [x^i (T^{kl} + t^{kl}) - x^k (T^{il} + t^{il})] (-g) dS_l \quad (9.17)$$

A tömegközéppont megmaradása a $J^{0\alpha}$ mennyiség megmaradásának felel meg:

$$x^0 \int (T^{\alpha 0} + t^{\alpha 0}) (-g) dV - \int x^\alpha (T^{00} + t^{00}) (-g) dV = const. \quad (9.18)$$

Másképpen:

$$X^\alpha = \text{const.}' + \frac{P^\alpha}{P^0} x^0 \quad (9.19)$$

ahol

$$X^\alpha = \frac{\int x^\alpha (T^{00} + t^{00}) (-g) dV}{\int (T^{00} + t^{00}) (-g) dV} \quad (9.20)$$

A négyesimpulzus és a négyes impulzusmomentum kifejezése felületi integrálként:

$$P^i = \frac{1}{c} \int \frac{\partial b^{i0l}}{\partial x^l} dV = \frac{1}{c} \int \frac{\partial b^{i0\alpha}}{\partial x^\alpha} dV = \frac{1}{c} \oint b^{i0\alpha} df_\alpha \quad (9.21)$$

Hasonlóan belátható, hogy

$$J^{ik} = \frac{1}{c} \oint (x^i b^{k0\alpha} - x^k b^{i0\alpha} + \lambda^{i0\alpha k}) df_\alpha \quad (9.22)$$

10. fejezet

Gömbszimmetrikus gravitációs tér

Sztatikus gravitációs tér. Gravitációs vöröseltolódás. Szinkronizált vonatkoztatási rendszer. Gravitáló testek erőtere. Gömbszimmetrikus gravitációs tér. Schwarzschild metrika. Mozgás gömbszimmetrikus gravitációs térben. Eseményhorizont. Gravitációs kolapszus.

10.1. Gravitáló testek erőtere. Gömbszimmetrikus gravitációs tér. Schwarzschild metrika.

Gömbszimmetria: a téridő-metrika a középponttól egyenlő távolságokban levő pontokban azonos. Az ívelemnégyzet legáltalánosabb gömbszimmetrikus kifejezése

$$ds^2 = h(r, t)dr^2 + k(r, t)(\sin^2 \Theta d\varphi^2 + d\Theta^2) + l(r, t)dt^2 + a(r, t)drdt \quad (10.1)$$

Az $r = f_1(r', t')$, $t = f_2(r', t')$ alakú transzformációk megőrzik a gömbszimmetriát. Elérhető, hogy $a(r, t) = 0$ és $k(r, t) = -r^2$ legyen. Így az általánosságot nem csorbítva írhatjuk, hogy

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - r^2(d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\varphi^2) - e^\lambda dr^2 \quad (10.2)$$

$x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \Theta$, $x^3 = \varphi$ választással a metrikus tenzor nullától különböző komponensei

$$g_{00} = e^\nu, \quad g_{11} = -e^\lambda, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \Theta \quad (10.3)$$

ill.

$$g^{00} = e^{-\nu}, g^{11} = -e^{-\lambda}, g^{22} = -r^{-2}, g^{33} = -r^{-2} \sin^{-2} \Theta \quad (10.4)$$

A nullától különböző Christoffel-szimbólumok:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda'}{2}, \Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \frac{\nu'}{2}, \Gamma_{33}^2 = -\sin \Theta \cos \Theta \quad (10.5)$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu}, \Gamma_{22}^1 = -r e^{-\lambda}, \Gamma_{00}^1 = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \quad (10.6)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \coth \Theta, \Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{\nu}}{2} \quad (10.7)$$

$$\Gamma_{10}^1 = \Gamma_{01}^1 = \frac{\dot{\lambda}}{2}, \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \Theta e^{-\lambda} \quad (10.8)$$

(Itt $\nu' = \partial\nu/\partial r$ és $\dot{\nu} = \partial\nu/\partial t$)

Ebból az Einstein-egyenletek:

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi k}{c^4} T_1^1 \quad (10.9)$$

$$-\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu} \dot{\lambda}}{2} \right) = \frac{8\pi k}{c^4} T_2^2 = \frac{8\pi k}{c^4} T_3^3 \quad (10.10)$$

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi k}{c^4} T_0^0 \quad (10.11)$$

$$-e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} = \frac{8\pi k}{c^4} T_0^1 \quad (10.12)$$

Anyagmentes esetben (az erőteret létrehozó tömegén kívül) csak három független egyenlet van:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 \quad (10.13)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \quad (10.14)$$

$$\dot{\lambda} = 0 \quad (10.15)$$

A vákuumbeli egyenletek megoldása:

λ nem függ az időtől

$\lambda + \nu = F(t)$, ahol $F(t)$ nullává tehető az idő alkalmas $t = f(t')$ alakú transzformációjával

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 + \frac{\text{const.}}{r} \quad (10.16)$$

Nagy távolságok esetén $g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} = 1 - \frac{2kM}{c^2 r}$, ezért

$$\text{const.} = -r_g = -\frac{2kM}{c^2} \quad (10.17)$$

Schwarzschild-metrika (K.Schwarzschild, 1916):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - r^2(d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\varphi^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} \quad (10.18)$$

(térbeli metrika, terület, sugár, időtartamok)

Nagy távolságban érvényes közelítő alak:

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{2kM}{c^2 r} (dr^2 + c^2 dt^2) \quad (10.19)$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi k}{c^4 r} \int_0^a T_0^0 r^2 dr = 1 - \frac{2kM}{c^2 r} \quad (10.20)$$

→

$$M = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^a T_0^0 r^2 dr \quad (10.21)$$

(gravitációs tömeghiány)

10.1.1. Mozgás gömbszimmetrikus gravitációs térben

Lagrange-függvény gravitációs térben mozgó ponttömeg esetén:

$$L = -mc \frac{ds}{dt} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{r_g}{r} - \frac{\dot{r}^2}{c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} - \frac{r^2 \dot{\Theta}^2}{c^2} - \frac{r^2 \sin^2 \Theta \dot{\phi}^2}{c^2}} \quad (10.22)$$

m az erőtérben mozgó részecske tömege.

Ha a z tengely a hármas impulzusmomentum-vektor irányába mutat, akkor a mozgás az xy síkban megy végbe, tehát $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\Theta} = 0$. Ekkor

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{r_g}{r} - \frac{\dot{r}^2}{c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} - \frac{r^2 \dot{\phi}^2}{c^2}} \quad (10.23)$$

Megmaradó mennyiségek:

Impulzusmomentum:

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{mr^2 \dot{\phi}}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r} - \frac{\dot{r}^2}{c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} - \frac{r^2 \dot{\phi}^2}{c^2}}} \quad (10.24)$$

Ebből

$$\frac{r^2}{c^2} \dot{\phi}^2 = \frac{\frac{J^2}{m^2 c^2 r^2}}{1 + \frac{J^2}{m^2 c^2 r^2}} \left(1 - \frac{r_g}{r} - \frac{\dot{r}^2}{c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}\right) \quad (10.25)$$

Ezzel

$$J = \frac{mr^2 \dot{\phi} \sqrt{1 + \frac{J^2}{m^2 c^2 r^2}}}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r} - \frac{\dot{r}^2}{c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}} \quad (10.26)$$

Energia:

$$E = \dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\phi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - L = \frac{mc^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 + \frac{J^2}{m^2 c^2 r^2}}}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r} - \frac{\dot{r}^2}{c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}} \quad (10.27)$$

Időfüggés és pálya:

$$\dot{\varphi} = \frac{Jc^2}{E} \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \quad (10.28)$$

$$\dot{r} = c \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \frac{J^2}{m^2 c^2 r^2}\right)} \quad (10.29)$$

Ezekből:

$$\begin{aligned} ct &= \frac{E}{mc^2} \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{J^2}{m^2 c^2 r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}} \\ &= \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \left(\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 + \left(\frac{Jc}{E}\right)^2 \frac{1}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}} \end{aligned} \quad (10.30)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \frac{J dr}{r^2 \sqrt{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \left(m^2 c^2 + \frac{J^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}} \\ &= \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\left(\frac{E}{Jc}\right)^2 - \left(\left(\frac{mc}{J}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}} \end{aligned} \quad (10.31)$$

Fénysugár esetében $m = 0$, $\frac{Jc}{E} = \rho$, ahol ρ az ütközési paraméter (végtelenből jövő fénysugár tömegvonzás hiányában ρ távolságban haladna el az erőter centruma mellett). Ekkor tehát

$$ct = \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}} \quad (10.32)$$

$$\varphi = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}} \quad (10.33)$$

10.1.2. Gravitációs kollapszus

A Schwarzschild-metrika szingularitása nem jelenti a téridő szingularitását ($g = -r^4 \sin^2 \Theta$ pl. nem szinguláris), csak azt, hogy $r \leq r_g$ esetén az r , Θ , φ merev koordinátarendszer valódi testekkel nem valósítható meg.

Koordinátatranszformáció:

$$c\tau = \pm ct \pm \int \frac{f(r) dr}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad R = ct + \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) f(r)} \quad (10.34)$$

Az új koordinátákban az ívelemnégyzet:

$$ds^2 = \frac{1 - \frac{r_g}{r}}{1 - f^2} (c^2 d\tau^2 - f^2 dR^2) - r^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\varphi^2) \quad (10.35)$$

$f(r) = \sqrt{r_g/r}$ választással a szingularitás eltűnik és szinkronizált koordinátarendszerhez jutunk:

$$R - c\tau = \int \frac{(1 - f^2) dr}{(1 - \frac{r_g}{r}) f} = \frac{2}{3} \frac{r^{3/2}}{r_g^{1/2}} \quad (10.36)$$

$$r = \left[\frac{3}{2} (R - c\tau) \right]^{2/3} r_g^{1/3} \quad (10.37)$$

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2r_g} (R - c\tau) \right]^{2/3}} - \left[\frac{3}{2} (R - c\tau) \right]^{4/3} r_g^{2/3} (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\varphi^2) \quad (10.38)$$

Schwarzschild-gömb:

$$\frac{3}{2} (R - c\tau) = r_g \quad (10.39)$$

Radiális mozgás "kívülről nézve":

$$J = 0, \quad E_0 = mc^2 \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_0}} \quad (10.40)$$

$$c(t - t_0) = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_0}} \int_r^{r_0} \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0}}} \quad (10.41)$$

A Schwarzschild-sugarat az összehúzódó objektum végtelen idő alatt éri el:

$$r - r_g = \text{const.} \times e^{-\frac{ct}{r_g}} \quad (10.42)$$

Sajátidőben mérve azonban a test véges idő alatt áthalad az eseményhorizonton és szintén véges idő alatt a centrumba esik:

$$\tau - \tau_0 = \frac{1}{c} \int \left(\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0} \right)^{-1/2} dr \quad (10.43)$$

11. fejezet

Gyenge gravitációs mezők

Kis tömegek esetében a gravitációs mezők mindenütt gyengék lehetnek, pontosabban található olyan koordinátarendszer, melynek pontjaiban a metrika a Minkowski-metrikától csak csekély mértékben tér el. Az ilyen koordinátarendszerek választása nem egyértelmű, mivel az identitáshoz közeli koordinátatranszformáció ugyanilyen tulajdonságú koordinátarendszerbe visz át.

Gyenge gravitációk mezők esetében a metrika tehát felírható

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik} \quad (11.1)$$

alakban, ahol η_{ik} a Minkowski-metrika, h_{ik} komponensei pedig abszolút értékben kicsik az egységhez képest. Ilyen körülmények között a h_{ik} -ban négyzetes és annál magasabb rendű tagok elhanyagolhatók. A metrikus tenzor determinánsa pl. közelítőleg

$$g = -1 - \eta^{ik} h_{ik} \quad (11.2)$$

lesz, a kontravariáns metrikus tenzor pedig

$$g^{ik} = \eta^{ik} - \eta^{ij} \eta^{kn} h_{jn} , \quad (11.3)$$

amit közvetlen számítással ellenőrizhetünk. Az indexek fel- és lehúzását a Minkowski-metrikával fogjuk végezni, tehát definíció szerint

$$h^{ik} = \eta^{ij} \eta^{kn} h_{jn} . \quad (11.4)$$

A Riemann-tenzor lineáris rendig

$$\mathcal{R}_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) , \quad (11.5)$$

amiből a Minkowski-metrikával végzett indexösszejtésekkel kapjuk a Ricci-tenzort:

$$\mathcal{R}_{km} = \frac{1}{2}\eta^{il} \left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) \quad (11.6)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\eta^{il} \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_m^l}{\partial x^l \partial x^k} + \frac{\partial^2 h_k^l}{\partial x^l \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_l^l}{\partial x^k \partial x^m} \right). \quad (11.7)$$

Ha $x'^i = x^i + \xi^i(\{x^k\})$ alakú transzformációt végzünk, ahol a ξ^i függvény kicsi, akkor

$$h'_{ik} = h_{ik} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i} \quad (11.8)$$

lesz az új koordinátarendszerben a metrika korrekciója, ami továbbra is kicsi. Ezt a szabadságot, tehát a négy ξ^i függvény tetszőleges megválasztásának lehetőségét arra használjuk, hogy alkalmas mellékfeltételeket kiszabva egyszerűsítsük az Einstein-egyenleteket. Legyen

$$\psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h_j^j. \quad (11.9)$$

A mellékfeltételek legyenek

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0. \quad (11.10)$$

Könnyen belátható, hogy a (11.7) egyenlet utolsó három tagja ennek következtében kölcsönösen kiejti egymást. Marad tehát

$$\mathcal{R}_{km} = \frac{1}{2}\square h_{km} \equiv -\frac{1}{2}\eta^{il} \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \quad (11.11)$$

Itt $\square = \Delta - 1/c^2 \partial^2 / \partial t^2$ a d'Alambert-operátor. Az Einstein-egyenletek ennek megfelelően az

$$\frac{1}{2}\square \psi_i^k = \frac{8\pi k}{c^4} T_i^k \quad (11.12)$$

alakot öltik. Közvetlenül belátható, hogy a (11.10) mellékfeltételek teljesülnek.

11.1. Sztatikus gravitációs tér

Sztatikus tömegeloszlás esetén a T_0^0 komponenshez képest az energia-impulzus tenzor többi tagja elhanyagolható. Ekkor a (11.12) egyenlet a

$$\Delta \psi_0^0 = \frac{16\pi k}{c^2} \rho \quad (11.13)$$

alakot ölti, ahol ρ a tömegsűrűség. A többi komponens esetén a jobboldalon nulla áll, amiből az következik, hogy ψ_i^k többi komponense eltűnik. A (11.13) egyenlet megoldása

$$\psi_0^0(\mathbf{r}) = -\frac{4k}{c^2} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (11.14)$$

amiből

$$h_0^0(\mathbf{r}) = -h_\alpha^\alpha(\mathbf{r}) = -\frac{2k}{c^2} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \equiv \frac{2\Phi(\mathbf{r})}{c^2}, \quad (11.15)$$

adódik. Itt az α térszerű indexre nincs összegzés, $\Phi(\mathbf{r})$ pedig a klasszikus newtoni gravitációs potenciál. Az ívelemnégyszet gyenge statikus gravitációs térben tehát

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi(\mathbf{r})}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi(\mathbf{r})}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (11.16)$$

11.2. Stacionárius gravitációs tér

Az energia-impulzus tenzor és metrika továbbra is időtől független, azonban T_0^0 mellett a T_0^α ill. T_α^0 komponensek is számottevőek. A (11.13) egyenlet mellett a

$$\Delta\psi_0^\alpha = \frac{16\pi k}{c^3} \rho v^\alpha \quad (11.17)$$

egyenlet is megoldandó, a megoldás

$$h_0^\alpha(\mathbf{r}) = -\frac{4k}{c^3} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')v^\alpha(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (11.18)$$

\mathbf{J} impulzusmomentumú forgó test esetén az eredmény

$$h_{\alpha 0}(\mathbf{r}) = \frac{2k}{c^3} \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{J})_\alpha}{r^3}. \quad (11.19)$$

11.3. Gravitációs hullámok

11.3.1. Gravitációs hullámok terjedése Minkowski-térben

A forrásoktól távol a gyenge gravitációs tér egyenletei a

$$\square\psi_i^k = 0 \quad (11.20)$$

hullámegyenletek, melyeknek a triviális nullán kívül fénysebességgel terjedő hullámmegoldásai is vannak. Ha a metrikát alávetjük a (11.8) koordinátatranszformációnak, a transzformált metrika továbbra is teljesíti a (11.10) mellékfeltételt, amennyiben

$$\square \xi^i = 0 \quad (11.21)$$

teljesül. Ezt a szabadságot fel fogjuk használni a metrika egyszerűbb alakra hozására.

A (11.20) egyenlet síkhullám megoldását

$$\psi_m^n = A_m^n \exp(ik_j x^j) \quad (11.22)$$

alakba írhatjuk, ahol a négyes hullámszámvektor négyzete nulla,

$$k_j k^j = 0, \quad (11.23)$$

a mellékfeltételek következtében pedig

$$A_m^n k_n = 0 \quad (11.24)$$

teljesül a konstans A_i^n amplitudóra. Mindebből a metrika korrekciójára

$$h_{nm} = \left(A_{nm} - \frac{1}{2} \eta_{nm} A_j^j \right) \exp(ik_j x^j) \quad (11.25)$$

adódik. Végezzünk olyan $x'^n = x^n + \xi^n(x)$ koordinátatranszformációt, melyre (11.21) teljesül, legyen speciálisan

$$\xi^n = \zeta^n \exp(ik_j x^j), \quad (11.26)$$

ahol ζ^n konstans vektor. Ezzel

$$A'_{nm} = A_{nm} + i\eta_{nm} k^j \zeta_j - ik_n \zeta_m - ik_m \zeta_n \quad (11.27)$$

Az általánosság csorbítása nélkül választhatjuk a koordinátatengelyeket úgy, hogy a hullámszámvektor térszerű része éppen az x tengely pozitív irányába mutasson. Ekkor tehát $k^0 = k^1 = k$, $k_2 = k_3 = 0$. Ezzel (11.24)-ből

$$A'_{10} = -A'_{00} = -A'_{11} \quad (11.28)$$

$$A'_{20} = -A'_{21} \quad (11.29)$$

$$A'_{30} = -A'_{31} \quad (11.30)$$

következik. A négy ζ^n számot úgy választjuk meg, hogy A'_{10} , A'_{20} , A'_{30} és $A'_{22} + A'_{33}$ nullává váljon. Ekkor az A_n^n spur is eltűnik. Ezek a feltételek expliciten (11.27) szerint azt jelentik, hogy

$$A_{10} + ik\zeta_0 - ik\zeta_1 = 0 \quad (11.31)$$

$$A_{20} - ik\zeta_2 = 0 \quad (11.32)$$

$$A_{30} - ik\zeta_3 = 0 \quad (11.33)$$

$$A_{22} + A_{33} - 2ik(\zeta_0 + \zeta_1) = 0, \quad (11.34)$$

ami a ζ_j komponensekre mindig megoldható. A (11.27) transzformációból ugyanakkor

$$A'_{23} = A_{23} \quad (11.35)$$

$$A'_{22} - A'_{33} = A_{22} - A_{33} \quad (11.36)$$

következik, ezeket a mennyiségeket tehát a koordinátatranszformáció nem befolyásolja. Végül tehát h_{nm} együtthatómátrixa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{23} & -A_{22} \end{pmatrix} \quad (11.37)$$

lesz, tehát a két független A_{22} és A_{23} mennyiség határozza meg. Az amplitudómátrix merőleges a hármas hullámszám-vektorra¹ (azaz $A_{n\alpha}k^\alpha = 0$), tehát transzverzális hullámmal van dolgunk. Az amplitudót meghatározó két független mennyiség két lehetséges polarizációnak felel meg ($A_{22} = 0$ és $A_{23} = 1$ ill. $A_{23} = 0$ és $A_{22} = 1$), melyek a terjedés iránya (az x tengely) körüli 45° -os elforgatással vihetők át egymásba.

11.3.2. Gravitációs síkhullám által szállított energia

Síkhullámokra a gravitációs tér (9.13) energia-impulzus pszeudotenzora

$$t^{ik} = \frac{c^4}{32\pi k} h_m^{n,i} h_n^{m,k} \quad (11.38)$$

alakban egyszerűsödik. Az x tengely mentén terjedő síkhullámra ebből az energiaáram sűrűségére

$$ct^{01} = \frac{c^3}{16\pi k} \left[(\dot{h}_{23})^2 + \frac{1}{4} (\dot{h}_{22} - \dot{h}_{33})^2 \right] \quad (11.39)$$

adódik.

11.3.3. Gravitációs hullámok kisugárzása

Források, azaz nullától különböző energia-impulzus tenzor esetén a (11.12) egyenletet kell megoldani. Ez pontosan ugyanolyan alakú, mint elektromágneses sugárzás esetén a négyespotenciál egyenlete, ennek megfelelően a megoldás közvetlenül felírható:

$$\psi_n^j(\mathbf{r}, t) = -\frac{4k}{c^4} \int \frac{T_n^j(\mathbf{r}', t') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (11.40)$$

¹Természetesen a négyes hullámszám-vektorra is merőleges.

ahol

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} . \quad (11.41)$$

Feltéve, hogy a forrás kiterjedése a hullámhossznál jóval kisebb, a megfigyelési pont távolsága a forrástól pedig a hullámhossznál jóval nagyobb (hullámzóna), akkor ez közelítőleg

$$\psi_n^j(\mathbf{r}, t) = -\frac{4k}{c^4 R_0} \int T_n^j(\mathbf{r}', t') d^3 \mathbf{r}' , \quad (11.42)$$

alakba írható, ahol

$$t' = t - \frac{R_0}{c} , \quad (11.43)$$

és

$$R_0 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| , \quad (11.44)$$

ahol \mathbf{r}_0 a forrás belsejébe eső tetszőleges, rögzített pont.

Ezt a formulát az előbbiek szerint elegendő térszerű indexekre kiértékelni, tehát a

$$h_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = -\frac{4k}{c^4 R_0} \int T_{\alpha\beta}(\mathbf{r}', t') d^3 \mathbf{r}' , \quad (11.45)$$

képletet használhatjuk. A kontinuitási egyenlet most egyszerűen

$$\frac{\partial T_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial T_{0\mu}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (11.46)$$

és

$$\frac{\partial T_{0\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (11.47)$$

alakba írható, amiből

$$\frac{\partial^2 T_{00}}{\partial x^{02}} = \frac{\partial^2 T_{0\mu}}{\partial x^\mu \partial x^0} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (11.48)$$

következik. Ha mindkét oldalt $x^\alpha x^\beta$ -vel szorozzuk, ebből

$$\frac{\partial^2 T_{00} x^\alpha x^\beta}{\partial x^{02}} = x^\alpha x^\beta \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu} x^\alpha x^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - 2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} (T_{\mu\alpha} x^\beta + T_{\mu\beta} x^\alpha) + 2 T_{\alpha\beta} \quad (11.49)$$

adódik. Az egyenlőséget a hármas térre integrálva, Gauss tételének alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\int T_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \right)^2 \int x^\alpha x^\beta T_{00} d^3 \mathbf{r} . \quad (11.50)$$

Így tehát

$$h_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = -\frac{2k}{c^4 R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho(\mathbf{r}', t') x'^\alpha x'^\beta d^3\mathbf{r}' , \quad (11.51)$$

ahol $\rho = T_{00}/c^2$ a tömegsűrűség. Bevezetjük a

$$Q_{\alpha\beta} = \int \rho(3x^\alpha x^\beta - \delta_{\alpha\beta} x_\gamma^2) d^3\mathbf{r} \quad (11.52)$$

kvadrupólmomentum-tenzort. Ezzel a forrástól távol x irányban elhelyezkedő megfigyelési pontban a két transzverzális amplitudó

$$h_{23} = -\frac{2k}{3c^4 R_0} \ddot{Q}_{23} \quad (11.53)$$

és

$$h_{22} - h_{33} = -\frac{2k}{3c^4 R_0} (\ddot{Q}_{22} - \ddot{Q}_{33}) . \quad (11.54)$$

Az x irányú energiaáram-sűrűségre ezzel (11.39)-ből a

$$ct^{01} = \frac{k}{36\pi c^5 R_0^2} \left[\ddot{Q}_{23}^2 + \frac{1}{4} (\ddot{Q}_{22} - \ddot{Q}_{33})^2 \right] \quad (11.55)$$

formulát kapjuk. A gravitációs sugárzás által szállított energiát a teljes térszögre vett integrálással kapjuk, a végeredmény

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{k}{45c^5} \ddot{Q}_{\alpha\beta}^2 , \quad (11.56)$$

ahol az α, β indexekre összegezni kell. Könnyen kiszámítható ennek segítségével két, közös tömegközéppont körül keringő égitest gravitációs sugárzása miatti energiaveszteség:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{32k^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5c^5 r^5} , \quad (11.57)$$

ahol m_1 és m_2 az égitestek tömege, r az egymástól mért távolságuk. Természetesen a formula adiabatikus közelítésben érvényes, amikor a gravitációs sugárzás által elvitt energia sokkal kisebb, mint a kettős rendszer mechanikai energiája, és emiatt r csak lassan változik a keringés periódusidejéhez képest.

12. fejezet

Az általános relativitáselmélet kísérleti bizonyítékai

Az ekvivalencia elvének kísérleti bizonyítékai. Perihélium-elfordulás. Fényelhajlás gravitációs térben. Összehasonlítás a newtoni gravitáció következményével. Gravitációs vöröseltolódás. Gravity Probe B kísérlet. Gravitációs hullámok, Hulse-Taylor-pulzár.

12.1. Az ekvivalencia elvének kísérleti bizonyítékai

Az általános relativitáselmélet szempontjából kulcsfontosságú az ekvivalencia elve, mely szerint a tehetetlenségi erők és a gravitációs erők lokálisan ekvivalensek. Ez egyben azt is jelenti, hogy a gravitációs mezőbe tett testre ható erő annak tehetetlen tömegével arányos (ahogyan a tehetetlenségi erők esetében), és semmilyen más tulajdonságától nem függ. Ez a feltevés kísérletileg ellenőrizhető. Ha a tehetetlen és a súlyos tömegek egyenlők, akkor a csak gravitációs mezőben történő mozgás a tömegtől és anyagi minőségtől független. Emiatt alkalmasak az ekvivalencia elvének ellenőrzésére az ejtési ill. ingakísérletek. A torziós inga alkalmazása a forgó Földön a centrifugális erő és a nehézségi erő egyidejű hatását méri. A gravitációs erő vízszintes komponenseinek kis különbségei a függőleges helyzetű vékony fémszálat elcsavarják. A kísérletekben az elcsavarodás szögét mérik. Az Eötvös-féle torziós ingával (az inga több különböző pozíciójában mérve, értve ezen a függőleges tengely körüli elforgatást) meghatározhatók a gravitációs potenciál egyes második deriváltjai, $\Delta\phi$ és ezenkívül az inga karjain elhelyezett tömegek súlyának esetleges anyagi minőségtől való függése. Eötvös módszere (geofizikai jelentőségén túl, mert egyébként az USA legnagyobb olajlelőhelyét az Eötvös-féle torziós inga segítségével fedezték fel) a maga korában kivételes tudományos hatású volt. Mérésének pontosságát Renner János még a 30-as években a 25-szörösére növelte. A jelenlegi legpontosabb mérés a hibahatárt csaknem további négy nagyságrenddel csökkentette. Mai tudásunk szerint legalább 13 jegy relatív pontossággal azonos a tehetetlen és a súlyos tömeg (legalábbis a

megvizsgált anyagokra).

Ciufolini és Wheeler összeállítása az elvégzett kísérletekről:

Év	Személy	Hiba	Módszer
500?	Philoponus	"kicsi"	ejtési kísérlet
1585	Stevin	5×10^{-2}	ejtési kísérlet
1590?	Galileo	2×10^{-2}	inga, ejtési kísérlet
1686	Newton	10^{-3}	inga
1832	Bessel	2×10^{-5}	inga
1910	Southern	5×10^{-6}	inga
1918	Zeeman	3×10^{-8}	torziós inga
1922	Eötvös	5×10^{-9}	torziós inga
1923	Potter	3×10^{-6}	inga
1935	Renner	2×10^{-10}	torziós inga
1964	Dicke, Roll, Krotkov	3×10^{-11}	torziós inga
1972	Braginsky, Panov	10^{-12}	torziós inga
1976	Shapiro, et al.	10^{-12}	lézerny visszaverődése a Holdról
1981	Keiser, Faller	4×10^{-11}	úszó torziós inga elektrosztatikus visszatérítéssel
1987	Niebauer, et al.	10^{-10}	ejtési kísérlet
1989	Heckel, et al.	10^{-11}	torziós inga
1990	Adelberger, et al.	10^{-12}	torziós inga
1999	Baessler, et al.	5×10^{-14}	torziós inga

12.2. Perihélium-elfordulás

Perihélium-elfordulás (gyenge gravitációs tér esetén):

Mivel a potenciál nem tisztán $1/r$ -es, hanem $1/r^3$ -ös korrekciót kap, a pályák nem záródnak. A napközelpont- a perihélium - ezért lassan vándorol, egy körülfordulás során

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{J dr}{r^2 \sqrt{\left(\left(\frac{E}{c}\right)^2 - m^2 c^2\right) + \frac{2km^2 M}{r} - \frac{J^2}{r^2} + \frac{2kMJ^2}{c^2} \frac{1}{r^3}}} - 2\pi \\ &= \frac{6\pi k^2 m^2 M^2}{c^2 J^2} = \frac{6\pi k M}{c^2 a(1-e^2)} \end{aligned} \quad (12.1)$$

mértékben, ahol a az ellipszis nagytengelye, e az excentricitása.

Bizonyítás.

$$\delta\varphi = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{J dr}{r^2 \sqrt{\left(\left(\frac{E}{c}\right)^2 - m^2 c^2\right) + \frac{2km^2 M}{r} - \frac{J^2}{r^2} + \frac{2kMJ^2}{c^2} \frac{1}{r^3}}} - 2\pi \quad (12.2)$$

Legyen $E' = \frac{1}{2m} \left(\left(\frac{E}{c} \right)^2 - m^2 c^2 \right) \approx E - mc^2$. Kötött mozgás esetén ez az érték negatív. Jelöljük továbbá a $\frac{2kMJ^2}{c^2}$ együtthatót β -val.

Fentebb r_{min} és r_{max} a pálya fordulópontjai, vagyis a gyökjel alatti kifejezés zérushe-
lyei. Ezek értéke közelítőleg (a β/r^3 -ös korrekciós tag elhanyagolásával kiszámítva):

$$\frac{1}{r_{min}} \approx \frac{km^2M}{J^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2E'J^2}{k^2m^3M^2}} \right) \quad (12.3)$$

$$\frac{1}{r_{max}} \approx \frac{km^2M}{J^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2E'J^2}{k^2m^3M^2}} \right) \quad (12.4)$$

Mivel $E' < 0$, mindkét érték pozitív.

Ezekután

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= -2\pi + 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{J dr}{r^2 \sqrt{2mE' + \frac{2km^2M}{r} - \frac{J^2}{r^2} + \frac{\beta}{r^3}}} \\ &= -2\pi - 2 \frac{\partial}{\partial J} \left(\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \sqrt{2mE' + \frac{2km^2M}{r} - \frac{J^2}{r^2} + \frac{\beta}{r^3}} \right) \end{aligned} \quad (12.5)$$

Az integrandust sorbafejtjük β szerint elsőrendig. A nulladrend eltűnik, ugyanis

$$\begin{aligned}
& -2\pi - 2 \frac{\partial}{\partial J} \left(\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \sqrt{2mE' + \frac{2km^2M}{r} - \frac{J^2}{r^2}} \right) \\
&= -2\pi + 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{J dr}{r^2 \sqrt{2mE' + \frac{2km^2M}{r} - \frac{J^2}{r^2}}} \\
&= -2\pi + 2 \int_{J/r_{max}}^{J/r_{min}} \frac{d\xi}{\sqrt{2mE' + \frac{2km^2M}{J} \xi - \xi^2}} \\
&\quad \left(\text{itt } \xi = \frac{J}{r} \right) \\
&= -2\pi + 2 \int_{J/r_{max}}^{J/r_{min}} \frac{d\xi}{\sqrt{2mE' + \frac{k^2m^4M^2}{J^2} - \left(\xi - \frac{km^2M}{J}\right)^2}} \\
&= -2\pi + 2 \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \\
&\quad \left(\text{itt } \zeta = \frac{\xi - \frac{km^2M}{J}}{\sqrt{2mE' + \frac{k^2m^4M^2}{J^2}}}, \quad \zeta_1 = \frac{\frac{J}{r_{max}} - \frac{km^2M}{J}}{\sqrt{2mE' + \frac{k^2m^4M^2}{J^2}}} = -1, \quad \zeta_2 = \frac{\frac{J}{r_{min}} - \frac{km^2M}{J}}{\sqrt{2mE' + \frac{k^2m^4M^2}{J^2}}} = 1 \right) \\
&= -2\pi + 2 \int_{-1}^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = -2\pi + 2 \arcsin \zeta \Big|_{-1}^1 = 0. \tag{12.6}
\end{aligned}$$

Első rendben:

$$\begin{aligned}
\delta\varphi &= -\beta \frac{\partial}{\partial J} \left(\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r^3 \sqrt{2mE' + \frac{2km^2M}{r} - \frac{J^2}{r^2}}} \right) \\
&= -\beta \frac{\partial}{\partial J} \left(\frac{1}{J^2} \int_{J/r_{max}}^{J/r_{min}} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{2mE' + \frac{2km^2M}{J}\xi - \xi^2}} \right) \\
&\quad \left(\text{itt } \xi = \frac{J}{r} \right) \\
&= -\beta \frac{\partial}{\partial J} \left(\frac{1}{J^2} \int_{J/r_{max}}^{J/r_{min}} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{2mE' + \frac{k^2m^4M^2}{J^2} - \left(\xi - \frac{km^2M}{J}\right)^2}} \right) \\
&= -\beta \frac{\partial}{\partial J} \left(\frac{1}{J^2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\left(\frac{km^2M}{J} + \zeta \sqrt{2mE' + \frac{k^2m^4M^2}{J^2}}\right) d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \\
&\quad \left(\text{itt } \zeta = \frac{\xi - \frac{km^2M}{J}}{\sqrt{2mE' + \frac{k^2m^4M^2}{J^2}}}, \quad \zeta_1 = \frac{\frac{J}{r_{max}} - \frac{km^2M}{J}}{\sqrt{2mE' + \frac{k^2m^4M^2}{J^2}}} = -1, \quad \zeta_2 = \frac{\frac{J}{r_{min}} - \frac{km^2M}{J}}{\sqrt{2mE' + \frac{k^2m^4M^2}{J^2}}} = 1 \right) \\
&= -\beta \frac{\partial}{\partial J} \left(\frac{km^2M}{J^3} \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}}_{=\pi} + \frac{1}{J^2} \sqrt{2mE' + \frac{k^2m^4M^2}{J^2}} \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}}_{=0} \right) \\
&= \beta \frac{3\pi km^2M}{J^4} \\
&= \frac{6\pi k^2 m^2 M^2}{c^2 J^2} = \frac{6\pi kM}{c^2 a(1 - e^2)} \tag{12.7}
\end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőség a perturbálatlan pálya paramétereit, az a fél nagytengelyt és az e excentricitást használja. A perturbálatlan pálya ugyanis:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \int_r^{r_{max}} \frac{J dr}{r^2 \sqrt{2mE' + \frac{2km^2M}{r} - \frac{J^2}{r^2}}} \\
&= \int_{J/r_{max}}^{J/r} \frac{d\xi}{\sqrt{2mE' + \frac{2km^2M}{J}\xi - \xi^2}} \\
&\quad \left(\text{itt } \xi = \frac{J}{r} \right) \\
&= \int_{J/r_{max}}^{J/r} \frac{d\xi}{\sqrt{2mE' + \frac{k^2m^4M^2}{J^2} - \left(\xi - \frac{km^2M}{J}\right)^2}} \\
&= \int_{\zeta_1}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \\
&\quad \left(\text{itt } \zeta = \frac{\xi - \frac{km^2M}{J}}{\sqrt{2mE' + \frac{k^2m^4M^2}{J^2}}}, \quad \zeta_1 = \frac{\frac{J}{r_{max}} - \frac{km^2M}{J}}{\sqrt{2mE' + \frac{k^2m^4M^2}{J^2}}} = -1 \right) \\
&= \int_{-1}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \pi - \arccos \zeta
\end{aligned} \tag{12.8}$$

Feltéve, hogy $\zeta \in (-1, 1)$ és $\varphi \in (0, \pi)$, a fenti összefüggésből

$$\zeta = \cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi \tag{12.9}$$

következik, azaz

$$\frac{\frac{J}{r} - \frac{km^2M}{J}}{\sqrt{2mE' + \frac{k^2m^4M^2}{J^2}}} = -\cos \varphi \tag{12.10}$$

Ebből

$$\frac{J}{r} = \frac{km^2M}{J} - \sqrt{2mE' + \frac{k^2m^4M^2}{J^2}} \cos \varphi, \tag{12.11}$$

azaz

$$\frac{1}{r} = \frac{km^2M}{J^2} \left(1 - \frac{J}{km^2M} \sqrt{2mE' + \frac{k^2m^4M^2}{J^2}} \cos \varphi \right) \tag{12.12}$$

Ez ellipszis egyenlete

$$p = \frac{J^2}{km^2M} \tag{12.13}$$

paraméterrel és

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E'J^2}{k^2m^3M^2}} \quad (12.14)$$

excentricitással:

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi} \quad (12.15)$$

A fél nagytengely

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1 - e \cos 0} + \frac{p}{1 - e \cos \pi} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1 - e} + \frac{p}{1 + e} \right) = \frac{p}{1 - e^2} \quad (12.16)$$

Ebből

$$\frac{J^2}{km^2M} = p = a(1 - e^2) \quad (12.17)$$

és ezzel

$$\delta\varphi = \frac{6\pi k^2 m^2 M^2}{c^2 J^2} = \frac{6\pi k M}{c^2 a(1 - e^2)} \quad (12.18)$$

A Naprendszerben a perihélium-elfordulás a Merkúr esetében a legerősebb. A jelenlegi legpontosabb - radarral végzett - megfigyelések szerint a Naprendszer tömegközéppontjához rögzített inerciarendszerhez képest a Merkúr perihélium-vándorlása évszázadonként összesen 574.10 ± 0.65 szögmásodpercet tesz ki. Ezt a következő okok magyarázzák:

Mérték (szögmásodperc/évszázad)	Ok
531.63 ± 0.69	A többi bolygó gravitációs vonzása
0.0254	A Nap lapultsága (kvadrupólmomentum)
42.98 ± 0.04	Általános relativitáselmélet
574.64 ± 0.69	Összesen
574.10 ± 0.65	Megfigyelés

Az általános relativitáselméletből származó jelentős járulékot figyelembe véve tehát a mért értékkel az elméleti érték hibahatáron belül egyezik.

12.3. A fény sugar elgörbülése gravitációs térben

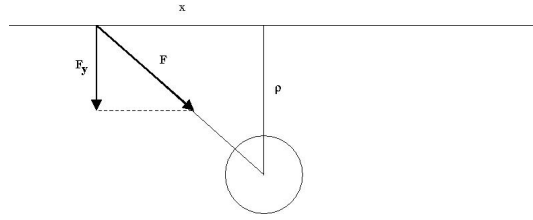
Gravitációs térben a fény sugar elhajlik. A fény sugar irányának megváltozása (gyenge gravitációs tér esetén):

$$\begin{aligned}
\delta\varphi &= 2 \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho \, dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{2kM\rho^2}{c^2} \frac{1}{r^3}}} - \pi \\
&= \frac{2r_g}{\rho} = \frac{4kM}{c^2\rho}
\end{aligned} \tag{12.19}$$

Bizonyítás. Legyen $r_{min} \approx \rho$ és $\beta' = \frac{2kM\rho^2}{c^2}$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\delta\varphi &= 2 \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho \, dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{\beta'}{r^3}}} - \pi \\
&= -\pi - 2 \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\int_{r_{min}}^{\infty} dr \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{\beta'}{r^3}} \right) \\
&\quad (\beta' \text{ a deriválás során állandónak tekintendő}) \\
&= -\beta' \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{r^3 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}} \right) \\
&= -\beta' \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\int_0^1 \frac{1}{2\rho^2} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi}} \right) \\
&\quad \left(\text{itt } \xi = \frac{\rho^2}{r^2} \right) \\
&= -\beta' \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{1}{2\rho^2} \underbrace{\left(-2\sqrt{1-\xi} \right)}_{=2} \Big|_0^1 \right) \\
&= \frac{2\beta'}{\rho^3} = \frac{4kM}{c^2\rho}
\end{aligned} \tag{12.20}$$

Kézenfekvő elvégeznünk egy félklasszikus számolást a következőképpen: egy fénysebességgel mozgó test mozgásirányra merőlegesen impulzusra tesz szert a newtoni gravitáció következtében. A pályát első közelítésben egyenesnek tekintjük. Az irányváltás szögét a merőleges impulzusnak és az eredeti impulzusnak az aránya adja meg.



12.1. ábra. Fénysugár elhaladása nagy tömegű égitest közelében.

$$F = \frac{k E/c^2 M}{\rho^2 + x^2} \quad (12.21)$$

$$F_y = \frac{\rho k E/c^2 M}{(\rho^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (12.22)$$

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= \frac{\Delta p}{E/c} = \frac{c}{E} \int_{-\infty}^{\infty} F_y \frac{dx}{c} = \frac{c}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho k E/c^2 M}{(\rho^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dx}{c} \\ &= \frac{kM}{c^2 \rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} d\xi = \frac{kM}{c^2 \rho} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha \, d\alpha \\ &\quad \left(\text{itt } \xi = \frac{x}{\rho} = \text{tg } \alpha \right) \\ &= \frac{2kM}{c^2 \rho} \end{aligned} \quad (12.23)$$

Ez feleannyi, mint amit az általános relativitáselmélet jósol. Azért nem kapjuk vissza az általános relativitáselmélet eredményét, mert a klasszikus közelítés érvényességéhez két feltétel szükséges:

- legyen gyenge a gravitációs tér
- a sebességek legyenek kicsik a fénysebességhez képest.

Az utóbbi nem teljesül. A klasszikus eredmény hibájának másik oka az, hogy a gravitációs mező nem skalármező, hanem tenzormező.

A fénysugár irányváltozását a Nap közelében először 1919-ben Eddington mérte meg teljes napfogyatkozáskor. Ilyenkor meghatározható a Nap melletti csillagok iránya, ami aztán összevethető azzal az iránnyal, amit pl. fél évvel később észlelnek, amikor a Nap és az illető csillag az ég átellenes pontjain láthatók a Földről. Az eredmények, bár nagy hibával, de az általános relativitáselméletet igazolták. A jelenlegi legjobb eredményt rádiócsillagászati módszerekkel kapták (Lebach et al., 1995), ennek egyrészt sokkal jobb a

szögfelbontása, másrészt nem kell várni a napfogyatkozásra. Az eredmények 8×10^{-4} relatív pontossággal egyeztek az általános relativitáselmélet jóslatával, az 1.75 szögmásodperces értékkel (közvetlenül a Nap mellett elhaladó fénysugárra, vagyis a fenti képletben ρ a Nap sugara).

12.4. Gravitációs vöröseltolódás

A gravitációs vöröseltolódás formulája elemi megfontolásokkal megkapható az energiamegmaradásra alapozva. A Föld felszínéről függőlegesen felfelé h távolságot megtevő foton körfrekvenciája legyen induláskor ω_1 , érkezéskor ω_2 . Mozgási energiája ennek megfelelően $\hbar\omega_1$ ill. $\hbar\omega_2$. Mivel a tömege $\hbar\omega/c^2$ (mindegy, melyik indexszel, mivel a csekély különbség elhanyagolható), a potenciális energia növekedése $(\hbar\omega/c^2)gh$, így az energiamegmaradásból

$$\Delta\omega = -\frac{\omega gh}{c^2}. \quad (12.24)$$

Ez megegyezik a (4.12) képlettel. Az effektus rendkívül kicsi relatív frekvenciaváltozást jelent, 22.5 m -en¹ mindössze 2×10^{-15} -öt. Ezt a rendkívül finom megváltozást mégis már 1960-ban sikerült kimutatni a nem sokkal korábban felfedezett Mössbauer-effektus² segítségével (Pound-Rebka kísérlet, 1960). A Mössbauer-effektus lényege, hogy alacsony hőmérsékleten megnő a visszalökődés-mentes - és így természetes vonalszélességű - gamma-rezonanciák valószínűsége. A jelenség annak köszönhető, hogy a fononspektrum alacsony energiás részén az állapotsűrűség nullához tart, így kis energiákon nagy valószínűséggel nem gerjesztődnek rácsrezgések, hanem a teljes rács egyetlen egysége tömbként lökődik vissza. Az egyébként nagyon éles atommagbéli gamma-átmenetek esetén pl. gázban erős a visszalökődés, ami nem teszi lehetővé a rezonanciák megfigyelését. Kristályrácsban viszont a rács egész tömege jelenik meg egyetlen atommag tömege helyett, így a visszalökődés teljességgel elhanyagolható lesz, és a nagyon éles rezonancia - az egyik minta atommagjai által kibocsátott gamma-sugárzás elnyelődése a másik minta atommagjaiban - megfigyelhetővé válik. A minta lassú mozgásával (a gyakorlatban rezgetésével) lehet a Doppler-effektus révén a frekvenciát hangolni, és ezzel a gravitációs vöröseltolódást kimutatni. A Pound-Rebka kísérletben a (12.24) képlet érvényességét 10% pontossággal sikerült igazolni. Pound és Schneider a hibát 1964-ben 1%-ra csökkentette, majd 1980-ban Vessot és munkatársai egy műholdon elhelyezett hidrogén-mézer segítségével 0.01%-os (10^{-4} -es) pontosságot értek el.

¹Ekkora volt ui. a szintkülönbség a Pound-Rebka kísérletben.

²R. L. Mössbauer, 1958.

12.5. Erőmentes pörgettyű precessziója: a Gravity Probe B kísérlet

Amint a 3.3 szakaszban láttuk, stacionárius, de nem sztatikus gravitációs mezőkben nyugvó pörgettyűk tengelyiránya kúpfelület mentén lassan elfordul, precesszál. A gyenge gravitációs mezők tárgyalásakor megmutattuk, hogy a Föld forgása miatt a Föld gravitációs mezejének is nullától különböző $g_{0\alpha}$ komponensei vannak. Gyenge stacionárius gravitációs mezőkben a (3.36) egyenlet vezető rendben

$$\frac{dn^\alpha}{dx^0} = -\frac{1}{2}g_{0\beta,\alpha}n^\beta \quad (12.25)$$

alakú lesz. Ennek megfelelően egy a Föld forgásában részt nem vevő erőmentes pörgettyű tengelye precesszál (Lense-Thirring-effektus³). Valóban, ha a (11.19) képletet az (12.25) egyenletbe helyettesítjük, azt kapjuk, hogy

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{k}{c^2 r^5} \{ r^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{J}) - 3 [\mathbf{r} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{J})] \mathbf{r} \} . \quad (12.26)$$

Az effektus kimutatásához egy pörgettyűt kell az űrben elhelyezni, hogy ne forogjon együtt a Földdel. Ahhoz, hogy ne zuhanjon le, keringenie is kell a Föld körül (lehetőleg minél közelebb a Földhöz, mivel az effektus a távolság harmadik hatványával fordítottan arányos). A keringés, mint korábban láttuk, a Thomas-precesszióra vezet, ami a keringés síkjára merőleges tengely körüli precesszió.⁴ A tényleges kísérlet, a Gravity Probe B esetén a keringés síkja a Föld tengelyével párhuzamos volt, mivel így a kétféle precesszió egymásra merőleges elmozdulást eredményez⁵, ami lehetővé teszi az elkülönítésüket. Valóban, egy ilyen pályára kiátlagolva a (12.26) egyenletet (mivel a precesszió nagyon lassú, az átlagolás folyamán a pörgettyű tengelyének irányvektora, \mathbf{n} állandónak tekinthető),

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{k}{2c^2 r^3} (\mathbf{J} \times \mathbf{n}) . \quad (12.27)$$

adódik. Ezzel szemben a Thomas-precesszió (amit ez esetben geodetikus-precessziónak szokás nevezni) egyenlete a (3.48)-(3.50) egyenletek alapján

$$\dot{\mathbf{n}} = -\frac{r^2 \omega^3}{2c^2} (\mathbf{s} \times \mathbf{n}) = -\frac{(kM)^{3/2}}{2c^2 r^{5/2}} (\mathbf{s} \times \mathbf{n}) , \quad (12.28)$$

ahol ω a keringés szögsebessége, M a Föld tömege és \mathbf{s} a pályasík normálvektora. Ez utóbbi az egyenlítői síkkal párhuzamos.

³Ugyanígy nevezik azt a jelenséget is, amikor egy égitest forgása miatt a körülötte keringő tömegpont pályasíkja elfordul.

⁴Együtt keringő koordinátarendszerben a Thomas-precessziót a (12.25) egyenletből is levezethetjük.

⁵A két effektus egyidejű jelenléte csak magasabb rendben eredményez korrekciót, így elhanyagolható.

40 év tervezés és előkészítés után 2004-ben állították pályára a Gravity Probe B műholdat, amely 2005-ig gyűjtötte az adatokat. Négy darab kb. pingponglabda méretű, nióbiumbevonató⁶ kvarcgömb volt a pörgettyű, az ismert legtökéletesebb gömbök, kb. 50 atomrétegni pontossággal. Az eredmények kiértékelése 2011-ig tartott, végül a (12.27) képletből adódó 0.037 szögmásodperc/év precessziót („frame dragging”), amely a Föld forgásának következménye, 19%-os pontossággal sikerült igazolni. A (12.28) geodetikus precesszió 6.6 szögmásodperc/év, ezt 0.2% pontossággal igazolta a mérés.

12.6. Gravitációs hullámok kisugárzása: a Hulse-Taylor-pulzár

1974-ben J.H.Taylor és R.A.Hulse az arecibo-i (Puerto Rico) 300 m-es rádiótávcsővel felfedezett egy pulzárt. A pulzárak neutroncsillagok, tömegük a Napénál valamivel nagyobb, de sugaruk csak 10 km körüli. Erős rádiósugárzást bocsátanak ki a mágneses tengelyük mentén egy keskeny nyalábban. Ha a forgástengely nem esik egybe a mágneses tengellyel, a rádiónyaláb egy kúpfelületet söpör végig. Ha a Föld véletlenül ezen a kúpfelületen van, akkor a forgás ütemében a pulzár irányából rádióimpulzus észlelhető. A Hulse és Taylor felfedezte PSR B1913+16 jelű pulzár⁷ esetében az észlelés 430 Mhz-en történt, és a rádióimpulzusok frekvenciája 59 ms volt (17 fordulat másodpercenként). Ez a frekvencia azonban ingadozott. A pulzárak forgása nagyon stabil, ezért a változás annak tulajdonítható, hogy a pulzár láthatatlan kísérője körül kering, és az impulzusok frekvenciája ennek során a Doppler-effektus miatt változik. Az impulzusok alapos elemzéséből meg lehetett határozni a kettős rendszer pályaelemeit. Kiderült, hogy mindkét csillag neutroncsillag közel egyenlő, 1.4 naptömegnyi tömeggel. Megnyúlt ellipszispályán keringenek a kettős tömegközéppontja körül, a legkisebb távolságuk 746 600 km, a legnagyobb 3 153 600 km. A pálya síkja kb. 45 fokos szöget zár be a megfigyelés irányával. A keringés periódusideje mindössze 7.75 óra. Ilyen körülmények között a periasztronelfordulás (a perihélium-elfordulás neve a Naptól különböző csillagok esetében) lényegesen nagyobb, mint a Merkúr esetében (ahol 43 szögmásodperc évszázadonként): 4 fok évenként. Az alapos elemzés megmutatta, hogy a keringés periódusideje évente 76.5 mikroszekundummal csökken. Ez a csökkenés a gravitációs hullámok kisugárzásából ered. A (11.57) formula (ill. ellipszispályákra érvényes általánosítása) a kettős rendszerre alkalmazva a periódusidő csökkenéséről 0.2%-os pontossággal számot ad (Weisberg és Taylor, 2004).⁸ Taylor és Hulse felfedezésükért 1993-ban Nobel-díjat kaptak.

Jelentős erőfeszítések történtek és történnek a gravitációs hullámok közvetlen, földi

⁶A szupravezetés érdekében, mert ennek segítségével tartották őket helyben ill. mérték a forgásukat.

⁷Felfedezőik tiszteletére Hulse-Taylor kettőspulzárnak is nevezik.

⁸Hulse és Taylor eredményei ennél pontatlanabbak voltak, de a felfedezés óta folyamatosan gyűlnek az adatok.

észlelésére. Egyelőre ez nem járt sikerrel, de néhány éven belül pozitív eredmények várhatók.

13. fejezet

Relativisztikus kozmológia

Homogén és izotrop tér. Friedmann-Robertson-Walker metrika. Skálafaktor. Zárt, nyílt, sík modell. Fény terjedése homogén univerzumban. Tágulás, vöröseltolódás. Divergenciaegyenlet. Anyagtípusok, állapotegyenletek. Korai és késői univerzum, domináns anyagtípusok.

13.1. Homogén és izotróp tér

Szinkronizált vonatkoztatási rendszert vezetünk be, ami minden téridőben lehetséges:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (13.1)$$

A kozmológiai elv szerint elegendően nagy távolságskálán (\propto ezer megaparsec) a tér homogén és izotrop. A homogenitás és izotrópia az euklideszi tér esetében azt jelenti, hogy a tér metrikája az eltolásokkal és elforgatásokkal szemben invariáns. Görbült tér esetén (ill. görbevonallú koordináták használata esetén) is megfogalmazhatjuk a homogenitás és izotrópia követelményét koordinátatranszformációk segítségével. Az $x'^i = x^i + \xi^i(x)$ infinitezimális koordinátatranszformáció hatására, amint ezt a 7. fejezetben láttuk, a metrika

$$\delta\gamma_{\alpha\beta} = -\xi_{\alpha;\beta} - \xi_{\beta;\alpha} \quad (13.2)$$

szerint változik meg. Azokat a koordinátatranszformációkat, melyek során a metrika nem változik, izometriának nevezzük. Egy izometria a definíciója értelmében a

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0 \quad (13.3)$$

egyenletnek tesz eleget. Az euklideszi tér izometriái a három független eltolás és a három független elforgatás. Ennek általánosításaként azt a teret nevezzük homogénnek és izotrópnak, melyben hat lineárisan független izometria létezik, vagyis amikor a (13.3) egyenletnek hat lineárisan független megoldása van. Megmutatható, hogy háromdimenziós térben ez a lehetséges maximális szám.

Az izometriák alakja adott pont közelében, lokálisan euklideszi rendszerben könnyen meghatározható, mivel ilyenkor a (13.3) egyenletben a kovariáns deriváltak az egyes koordináták szerinti parciális deriváltakkal esnek egybe, ugyanúgy, mint euklideszi metrika esetén. Az egyenlet lineárisan független megoldásai az infinitezimális eltolások és elforgatások.

Megmutatjuk, hogy a háromdimenziós görbületi tenzor a homogenitás és az izotrópia következtében közvetlenül a metrikus tenzorról fejezhető ki úgy, hogy annak deriváltjai egyáltalán nem lépnek fel. Ebből a célból képezzük a háromdimenziós $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ görbületi tenzorból a

$$Q^{\alpha\beta} = \frac{1}{4} E^{\alpha\mu\nu} E^{\beta\eta\kappa} P_{\mu\nu\eta\kappa} \quad (13.4)$$

másodrendű tenzort! Itt $E^{\alpha\mu\nu}$ a görbevonali koordinátákba transzformált háromdimenziós Levi-Civita-tenzor, amely a szokásos Levi-Civita-tenzortól csak a térbeli metrika determinánsának négyzetgyökével különbözik. A $Q^{\alpha\beta}$ tenzor szimmetrikus, mivel a Riemann-tenzor szimmetrikus az első és a második indexpár cseréjére:

$$Q^{\alpha\beta} = Q^{\beta\alpha} . \quad (13.5)$$

A tér adott pontjában térjünk át lokálisan euklideszi koordinátákra! Ekkor az alsó és felső indexek között nincs többé különbség. Tekintsük a $Q^{\alpha\beta}$ tenzor sajátértékegyenletét:

$$Q^{\alpha\beta} w^\beta = \lambda w^\alpha . \quad (13.6)$$

A tenzor szimmetriája miatt a sajátértékek valósak. Ha a három λ sajátérték nem lenne ugyanaz, akkor a sajátvektorok kitüntetett irányokat jelentenének, ami ellentmondana az izotrópia követelményének. Így tehát a sajátértékek egyenlőek, ami azt jelenti, hogy

$$Q^{\alpha\beta} = \lambda \delta^\alpha_\beta , \quad (13.7)$$

vagyis a Q^α_β tenzor az egységtenzorral arányos. Ha visszatérünk görbevonali koordinátákra,

$$Q^{\alpha\beta} = \lambda \gamma^{\alpha\beta} \quad (13.8)$$

adódik. A λ sajátérték minden pontban azonos kell, hogy legyen (nem függhet a térkoordinátáktól), mivel máskülönben a homogenitás követelménye nem teljesülne. Mivel

azonban mindezek a megfontolások rögzített időpontra vonatkoznak, a λ sajátérték az időtől még függhet.

A (13.4) egyenletből ezek után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
P_{\mu\nu\eta\kappa} &= E_{\alpha\mu\nu} E_{\beta\eta\kappa} Q^{\alpha\beta} = \lambda E_{\alpha\mu\nu} E_{\beta\eta\kappa} \gamma^{\alpha\beta} \\
&= \lambda E_{\alpha\mu\nu} E^{\alpha}_{\eta\kappa} = \lambda E_{\alpha\mu\nu} E^{\alpha\eta'\kappa'} \gamma_{\eta\eta'} \gamma_{\kappa\kappa'} = \lambda \epsilon_{\alpha\mu\nu} \epsilon^{\alpha\eta'\kappa'} \gamma_{\eta\eta'} \gamma_{\kappa\kappa'} \\
&= \lambda \left(\delta_{\mu}^{\eta'} \delta_{\nu}^{\kappa'} - \delta_{\nu}^{\eta'} \delta_{\mu}^{\kappa'} \right) \gamma_{\eta\eta'} \gamma_{\kappa\kappa'} = \lambda (\gamma_{\eta\mu} \gamma_{\kappa\nu} - \gamma_{\eta\nu} \gamma_{\kappa\mu}) , \tag{13.9}
\end{aligned}$$

tehát a tér homogenitása és izotrópiája miatt a háromdimenziós görbületi tenzor algebrailag kifejezhető a térbeli metrika segítségével. A háromdimenziós Ricci-tenzor ennek következtében

$$P_{\alpha\beta} = 2\lambda \gamma_{\alpha\beta} \tag{13.10}$$

lesz, a térgömbület pedig

$$P = 6\lambda . \tag{13.11}$$

A λ paraméter előjele szerint három lehetőség állhat fenn:

- $\lambda = 0$: euklideszi (sík) tér,
- $\lambda > 0$: pozitív görbületű (zárt) tér,
- $\lambda < 0$: negatív görbületű (nyílt) tér.

A jelenlegi precíziós kozmológiai mérések a sík tér esetével konzisztensek.

13.1.1. Sík tér

Ilyenkor a tér görbületlen¹, a metrika tehát az euklideszi metrika. Ez tartalmazhat még egy időfüggő $R(t)$ skálafaktort, ami adott időpontban csupán a koordináták és a valódi távolságok közötti arányossági tényező, így a téridőbeli ívelemnégyzet

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{13.12}$$

Polárkoordinátákban:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) (dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)) \tag{13.13}$$

¹A téridő azonban ilyenkor is görbült, mert a téridő Riemann-tenzora általában nem tűnik el.

Az $R(t)$ skálafaktor időfüggését az Einstein-egyenletekből kapjuk (ld. később). Most - feltéve, hogy $R(t)$ ismert - a metrika fizikai következményeit elemezzük.

Megmutatjuk, hogy adott térkoordinátájú pontok geodetikus világvonálnak felelnek meg. Ha az állítás igaz, akkor négyessebesség térszerű komponensei eltűnnek, azaz $u^\alpha = 0$ és $u^0 = 1$ kielégíti a

$$\frac{Du^i}{ds} = 0 \quad (13.14)$$

geodetikus egyenletet. Számítsuk ki ehhez a Christoffel-szimbólumokat:

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}g^{im} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right) \quad (13.15)$$

A definícióból következően a nullától különböző komponenseknek legfeljebb egy időszzerű indexe lehet ($x^0 = t$).

$$\Gamma^0{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\gamma_{\alpha\beta} \quad (13.16)$$

$$\Gamma^\alpha{}_{0\beta} = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\delta}\dot{\gamma}_{\delta\beta} = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\delta_\beta^\alpha \quad (13.17)$$

Ezzel geodetikus egyenlet komponensei:

$$\frac{du^0}{ds} + \Gamma^0{}_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 0 \quad (13.18)$$

$$\frac{du^\alpha}{ds} + 2\Gamma^\alpha{}_{0\beta}u^0 u^\beta = 0. \quad (13.19)$$

Látható, hogy mind az időszzerű, mind a térszerű komponensekre vonatkozó egyenletek azonosan teljesülnek. Ez azt jelenti, hogy ha egy tömegpont adott térkoordinátájú pontban nyugszik, akkor később is ott marad.

Távolságok:

A térben nyugvó pontok közötti távolságot a metrika térbeli része adja meg:

$$dl = R(t)\sqrt{dx^\alpha dx^\alpha} \quad (13.20)$$

A térben nyugvó pontok közötti távolság tehát a skálafaktornak megfelelően változik.

Fény terjedése:

Fény terjedése során az ívelemnégyszet eltűnik. Az izotrópia miatt elegendő az origóból sugárirányban kifelé terjedő fénysugarat vizsgálni:

$$ds^2 = 0 \quad \rightarrow \quad dr = \frac{cdt}{R(t)} \quad (13.21)$$

Adott időpontban mért távolság a kibocsájtás helyétől:

$$\ell = R(t_2) \int_{t_1}^{t_2} \frac{cdt}{R(t)} \quad (13.22)$$

Anyagdominált univerzumban pl. $R(t) \propto t^{2/3}$, így a jelen t_0 pillanatban az eseményhorizont távolsága tőlünk (annak a felületnek a távolsága, ahonnan a $t_1 = 0$ időpontbeli Ősrobbanástól bármilyen hatás hozzánk érkezhett)

$$\ell_{\text{horizont}} = 3ct_0 . \quad (13.23)$$

A valóságban az Univerzum nem volt mindig anyagdominált, ezért ez a formula sem érvényes (a tényleges horizont jóval messzebb van). Jó közelítést ad viszont az utolsó ütközés távolságára, arra a távolságra, ahonnan a lecsatolódáskor útnak indult fény a mikrohullámú kozmikus háttérsugárzás formájában hozzánk érkezik, vagyis az általunk látható Univerzum sugarára.

A fény terjedése közben változik a hullámhossza és a frekvenciája, ezért felírjuk rá a geodetikus egyenletet:

$$\frac{dk^0}{d\lambda} + \Gamma^0_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0 \quad (13.24)$$

ezt elosztva a négyes hullámszám-vektor időszerű komponensét definiáló egyenlettel, ami

$$\frac{dx^0}{d\lambda} = k^0 , \quad (13.25)$$

azt kapjuk, hogy

$$\dot{k}^0 = -\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} k^0 \quad \rightarrow \quad k^0 \propto \frac{1}{R(t)} . \quad (13.26)$$

Itt felhasználtuk a Christoffel-szimbólumok fenti kifejezését. Az eredmény azt jelenti, hogy

$$\frac{\omega(t_2)}{\omega(t_1)} = \frac{R(t_1)}{R(t_2)} , \quad (13.27)$$

tehát a frekvencia fordítottan arányos a skálafaktorral. Ez a jelenség a kozmológiai vöröseltolódás. A sugárzás lecsatolódása óta a skálafaktor mintegy 1088-szorosára nőtt, emiatt a lecsatolódáskor még 2965 K hőmérsékletű hőmérsékleti sugárzás, melynek a maximális intenzitáshoz tartozó hullámhossza 977 nm (frekvenciája 3.07×10^{14} Hz) volt, a jelenlegi mikrohullámú kozmikus háttérsugárzássá szelídült, amely szintén hőmérsékleti sugárzás, de a maximális intenzitás frekvenciája 160.4 GHz, a hullámhossza 1.063 mm, ami 2.726 K (-270°C) hőmérsékletnek felel meg.²

A fény intenzitása szintén nemtriviális módon változik a táguló Univerzumban. Az intenzitás az adott r sugárhoz tartozó valódi felülettel nyilvánvalóan fordítottan arányos, de ezenkívül arányos a frekvencia négyzetével is. Az egyik ω tényező a fotonok érkezési ütemének felel meg (ahogy az adott felületen átlépnek), a másik pedig az egyes fotonok $\hbar\omega$ energiájának. Így tehát

$$I \propto \frac{\omega^2}{A} \propto \frac{1}{R^4(t) \left(\int \frac{cdt}{R(t)} \right)^2}, \quad (13.28)$$

azaz

$$\frac{I(t_2)}{I(t_1)} = \frac{R^4(t_1) \left(\int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{R(t)} \right)^2}{R^4(t_2) \left(\int_{t_0}^{t_2} \frac{dt}{R(t)} \right)^2}. \quad (13.29)$$

13.1.2. Pozitív görbületű tér

Homogén és izotróp térmetrikát kapunk a következő konstrukcióval: egy képzeletbeli négydimenziós euklideszi térben elhelyezkedő R sugarú négydimenziós gömb háromdimenziós felszínének metrikáját határozzuk meg. Nyilvánvaló ugyanis, hogy a gömbfelszín geometriája (akárhány dimenzióban) homogén és izotróp, nincsenek rajta se kitüntetett pontok, se kitüntetett irányok.

$$d\ell^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 \quad (13.30)$$

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = R^2 \quad (13.31)$$

Utóbbiból

$$x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3 + x^4 dx^4 = 0 \quad (13.32)$$

²A Wien-féle eltolódási törvény értelmében a maximális intenzitás frekvenciája arányos az abszolút hőmérséklettel.

Így

$$d\ell^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \frac{(x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3)^2}{R^2 - ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)} \quad (13.33)$$

Metrika az origó közelében:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{x^\alpha x^\beta}{R^2} \quad (13.34)$$

Térgömbület:

$$P = \frac{6}{R^2} \quad (13.35)$$

Térbeli polárkoordináták:

$$x^1 = R r \sin \vartheta \cos \varphi \quad (13.36)$$

$$x^2 = R r \sin \vartheta \sin \varphi \quad (13.37)$$

$$x^3 = R r \cos \vartheta \quad (13.38)$$

$$d\ell^2 = R^2 dr^2 + R^2 r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) + \frac{R^4 r^2 dr^2}{R^2 - R^2 r^2} \quad (13.39)$$

azaz

$$d\ell^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right) \quad (13.40)$$

Téridőbeli ívelemnégyzet:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right) \quad (13.41)$$

13.1.3. Negatív görbületű tér

Beágyazás csak hét-dimenziós euklideszi térbe lehetséges, formálisan viszont írhatjuk:

$$d\ell^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \frac{(x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3)^2}{-R^2 - ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)} \quad (13.42)$$

Metrika az origó közelében:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{x^\alpha x^\beta}{R^2} \quad (13.43)$$

Térgörbület:

$$P = -\frac{6}{R^2} \quad (13.44)$$

Térbeli polárkoordináták:

$$x^1 = R r \sin \vartheta \cos \varphi \quad (13.45)$$

$$x^2 = R r \sin \vartheta \sin \varphi \quad (13.46)$$

$$x^3 = R r \cos \vartheta \quad (13.47)$$

$$d\ell^2 = R^2 dr^2 + R^2 r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) + \frac{R^4 r^2 dr^2}{-R^2 - R^2 r^2} \quad (13.48)$$

azaz

$$d\ell^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right) \quad (13.49)$$

Téridőbeli ívelemnégyzet:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right) \quad (13.50)$$

13.1.4. Friedmann-Robertson-Walker-metrika

A három különböző eset egységes alakban (Friedmann-Robertson-Walker-metrika):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right) \quad (13.51)$$

Itt $K = 0, \pm 1$.

Távolságok:

Sugárirányra merőlegesen:

$$d\ell = R(t) r d\vartheta \quad (13.52)$$

Sugárirányban:

$$d\ell = R(t) \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} \quad (13.53)$$

Fény terjedése:

$$ds^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dr}{\sqrt{1 - K r^2}} = \frac{cdt}{R(t)} \quad (13.54)$$

Adott időpontban mért távolság a kibocsátás helyétől:

$$\ell = R(t_2) \int_{t_1}^{t_2} \frac{cdt}{R(t)} \quad (13.55)$$

Christoffel-szimbólumok:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right) \quad (13.56)$$

A nullától különböző komponenseknek legfeljebb egy időszerű indexe lehet ($x^0 = t$).

$$\Gamma^0_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \gamma_{\alpha\beta} \quad (13.57)$$

$$\Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\delta} \dot{\gamma}_{\delta\beta} = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \delta^\alpha_\beta \quad (13.58)$$

$$\frac{dk^0}{d\lambda} + \Gamma^0_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0 \quad (13.59)$$

$$\frac{dx^0}{d\lambda} = k^0 \quad (13.60)$$

$$\dot{k}^0 = -\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} k^0 \quad \rightarrow \quad k^0 \propto \frac{1}{R(t)} \quad (13.61)$$

$$\frac{\omega(t_2)}{\omega(t_1)} = \frac{R(t_1)}{R(t_2)} \quad (13.62)$$

A frekvencia fordítottan arányos a skálafaktorral (vöröseltolódás az Univerzum tágulása során).

Intenzitás:

$$I \propto \frac{\omega^2}{A} \propto \frac{1}{R^4(t)r^2(t)} \quad (13.63)$$

$$\frac{I(t_2)}{I(t_1)} = \frac{R^4(t_1)r^2(t_1)}{R^4(t_2)r^2(t_2)} \quad (13.64)$$

ahol

$$\int_0^{r(t_i)} \frac{dr}{\sqrt{1 - K r^2}} = \int_{t_0}^{t_i} \frac{cdt}{R(t)} \quad (13.65)$$

Nyugalmi tömeggel rendelkező részecskék mozgása

Ha a nyugalmi tömeg nem nulla, a világvonal paraméterezésére az ívhossz használható. A geodetikus egyenlet térszerű komponensei:

$$\frac{Du^\alpha}{ds} = \frac{du^\alpha}{ds} + 2\Gamma_{0\beta}^\alpha u^0 u^\beta = \frac{du^\alpha}{ds} + 2\frac{\dot{R}}{R} u^0 u^\alpha = 0. \quad (13.66)$$

Ezt u^0 -lal osztva, mivel $u^0 ds = dx^0$,

$$\frac{\dot{u}^\alpha}{u^\alpha} = -2\frac{\dot{R}}{R} \quad (13.67)$$

adódik (az α indexre nincs összegzés!). Az egyenlet megoldása

$$u^\alpha \propto \frac{1}{R^2}. \quad (13.68)$$

A valódi (mért) impulzus térszerű komponense ebből

$$p^\alpha = mc u^\alpha R \propto \frac{1}{R}, \quad (13.69)$$

ami összhangban van a $p = h/\lambda$ deBroglie-összefüggéssel (λ a hullámhossz, ami, mint minden távolság, R -rel arányosan növekszik), annak ellenére, hogy szokásos kvantumviselkedés atomi skálájától távol, hatalmas tömegű égitestek esetére alkalmazzuk.

Az impulzusra kapott eredmény azt mutatja, hogy az FRW-koordinátarendszerhez képest mozgó tömegpontok a tágulás során egyre lassulnak, és határesetben megállnak.

13.2. Friedmann-egyenletek

Számítsuk ki a görbületi tenzor komponenseit a (5.23), (13.51), (13.57), (13.58) képletek alapján! A térszerű és időszzerű indexeket szétválasztva kapjuk, hogy³

$$\mathcal{R}_{0\alpha 0\beta} = \frac{\ddot{R}}{R} \gamma_{\alpha\beta} \quad (13.70)$$

$$\mathcal{R}_{0\alpha\beta\gamma} = 0 \quad (13.71)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -P_{\alpha\beta\gamma\delta} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 (\gamma_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma} - \gamma_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta}) \\ &= \left[-\frac{K}{R^2} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \right] (\gamma_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma} - \gamma_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta}) \end{aligned} \quad (13.72)$$

³A ki nem írt komponensek a görbületi tenzor szimmetriatulajdonságai alapján közvetlenül felírhatók.

Ebból indexösszejtéssel a Ricci-tenzor

$$\mathcal{R}_{00} = -3\frac{\ddot{R}}{R} \quad (13.73)$$

$$\mathcal{R}_{0\alpha} = 0 \quad (13.74)$$

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} = \left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{2K}{R^2} \right] \gamma_{\alpha\beta}, \quad (13.75)$$

a Ricci-skalár pedig

$$\mathcal{R} = -6\frac{\ddot{R}}{R} - 6\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{6K}{R^2} \quad (13.76)$$

Ezzel az Einstein-egyenletek (melyeket ebben a speciális esetben Friedmann-egyenleteknek hívunk):

A 0, 0 komponens (3-mal osztva) az első Friedmann-egyenlet:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{Kc^2}{R^2} = \frac{8\pi k}{3c^2} \epsilon \quad (13.77)$$

Az α, β komponens ($-\gamma_{\alpha\beta}$ -val leosztva) a második Friedmann-egyenlet:

$$\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{Kc^2}{R^2} = -\frac{8\pi k}{c^2} p \quad (13.78)$$

13.2.1. A divergenciaegyenlet

Az Einstein-egyenletekből következik, hogy az energia-impulzus tenzor kovariáns négyes-divergenciája eltűnik:

$$T_i{}^k{}_{;k} = 0 \quad (13.79)$$

Ez $i = 0$ esetén

$$T_0{}^k{}_{;k} + \Gamma^k{}_{jk} T_0{}^j - \Gamma^j{}_{0k} T_j{}^k = 0 \quad (13.80)$$

alakba írható, ami a makroszkopikus anyag és az FRW-metrika esetén érvényes

$$T_0{}^0 = \epsilon, \quad T_\alpha{}^\beta = -p\delta_\alpha^\beta, \quad \Gamma^\alpha{}_{0\beta} = \frac{\dot{R}}{R}\delta_\beta^\alpha \quad (13.81)$$

összefüggések segítségével a következő, ún. divergenciaegyenletre vezet:

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{R}}{R}(\epsilon + p) = 0 \quad (13.82)$$

Másképp:

$$\int \frac{d\epsilon}{\epsilon + p} = -3 \int \frac{dR}{R} \quad (13.83)$$

A divergenciaegyenlet közvetlenül a Friedmann-egyenletekből is levezethető: az első Friedmann-egyenlet időderiváltjából és a második Friedmann-egyenletből az \dot{R} -ot tartalmazó tag kiküszöbölésével kapható meg.

A divergenciaegyenlet megoldásához csak a $p(\epsilon)$ állapotegyenlet ismerete szükséges, és a megoldás az energiasűrűséget ill. a nyomást határozza meg a skálafaktor függvényében. Ezután az első Friedmann-egyenletből kapható meg a skálafaktor időfüggése.

13.2.2. A Friedmann-egyenletek megoldása

Sík tér, nemrelativisztikus anyag

$$K = 0, \quad p = 0 \quad (13.84)$$

A (13.82) divergenciaegyenletből ebben az esetben azt kapjuk, hogy

$$\epsilon \propto R^{-3}. \quad (13.85)$$

Ez szemléletesen is könnyen megérthető. Nemrelativisztikus anyag esetében az egyes tömegpontok energiája gyakorlatilag a nyugalmi energia, így adott fizikai térfogatban az energia állandó. A térfogat azonban R^3 -nal arányosan növekszik a tágulás folyamán, emiatt az energiasűrűség R^{-3} szerint csökken.

A (13.85) energiasűrűséget az (13.77) Friedmann-egyenletbe helyettesítve kapjuk a skálafaktor időfüggését:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi k}{3c^2} \epsilon_0 \frac{R_0^3}{R^3} \quad (13.86)$$

amiből

$$R \propto t^{2/3} \quad (13.87)$$

adódik.

Sík tér, ultrarelativisztikus anyag

$$K = 0, \quad p = \frac{1}{3}\epsilon \quad (13.88)$$

A (13.82) divergenciaegyenletből ebben az esetben azt kapjuk, hogy

$$\epsilon \propto R^{-4}. \quad (13.89)$$

Relativisztikus anyag esetében az egyes tömegpontok (pl. fotonok) energiája a tágulás során a kozmológiai vöröseltolódás miatt $1/R$ törvény szerint csökken. A térfogatok azonban R^3 -al arányosan növekednek, emiatt az energiasűrűség R^{-4} szerint csökken.

A (13.89) energiasűrűséget az (13.77) Friedmann-egyenletbe helyettesítve kapjuk a skálafaktor időfüggését:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi k}{3c^2} \epsilon_0 \frac{R_0^4}{R^4} \quad (13.90)$$

amiből

$$R \propto t^{1/2} \quad (13.91)$$

adódik.

Görbületi tag

A görbületi tagot átvihetjük a (13.77), (13.78) Friedmann-egyenletek jobboldalára, és egyfajta anyag energia-impulzus tenzorának tekinthetjük. A megfelelő energiasűrűség $-(3c^2K)/(8\pi kR^2)$ lesz, a nyomás pedig $(c^2K)/(8\pi kR^2)$. Ebből következően a görbületi tagnak megfelelő állapotegyenlet

$$p = -\frac{1}{3}\epsilon. \quad (13.92)$$

Ebből a energiára a divergenciaegyenletből természetesen ismét $\epsilon \propto 1/R^2$ adódik. Görbületdominált univerzumban (ami persze csak $K = -1$ esetén lehetséges)

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = -\frac{K}{R^2} \quad (13.93)$$

teljesülne, amiből

$$R \propto t. \quad (13.94)$$

Kozmológiai állandó

Az Einstein-egyenletek levezetését módosíthatjuk úgy, hogy az \mathcal{R} invariáns görbülethez hozzáadunk egy állandót:

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int (\mathcal{R} + 2\Lambda) \sqrt{-g} d\Omega \quad (13.95)$$

Ez a Lagrange-sűrűség skalár voltát nem változtatja meg, viszont újabb tag megjelenéséhez vezet az Einstein-egyenletekben:

$$\mathcal{R}_{ik} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} + \Lambda g_{ik} \quad (13.96)$$

A Λ mennyiség neve kozmológiai állandó, és, amint az a bevezetéséből látszik, a vákuum univerzális görbületeként értelmezhető. Az egyenletből azonnal leolvasható, hogy a kozmológiai állandónak megfelelő állapotegyenlet:

$$p = -\epsilon \quad (13.97)$$

Ez az állapotegyenlet a (13.82) divergenciaegyenlettel kombinálva $\epsilon \propto 1$ egyenletre vezet, vagyis a kozmológiai állandónak megfelelő energiasűrűség nem változik a táguláskor, így a kozmológiai állandó a vákuum univerzális energiasűrűségének is tekinthető. Az első Friedmann-egyenlet ezúttal

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{1}{3}c^2\Lambda, \quad (13.98)$$

alakú, amiből exponenciálisan (gyorsulva) táguló megoldás következik:

$$R \propto \exp\left(\sqrt{\Lambda/3}ct\right). \quad (13.99)$$

Összefoglalva:

A Friedmann-egyenletek megoldásai egy-egy domináns anyagtípus esetén			
anyagfajta	állapotegyenlet	energiasűrűség skálafüggése	skálafaktor időfüggése
nemrelativisztikus anyag	$p = 0$	$\epsilon \propto 1/R^3$	$R \propto t^{2/3}$
ultrarelativisztikus anyag	$p = \frac{1}{3}\epsilon$	$\epsilon \propto 1/R^4$	$R \propto t^{1/2}$
görbület	$p = -\frac{1}{3}\epsilon$	$\epsilon \propto 1/R^2$	$R \propto t \quad (K = -1)$
kozmológiai állandó	$p = -\epsilon$	$\epsilon \propto 1$	$R \propto \exp\left(\sqrt{\Lambda/3}ct\right)$
-	$p = w\epsilon$	$\epsilon \propto 1/R^{3(1+w)}$	$R \propto t^{2/3/(1+w)}$

Az utolsó sor a nyomás és az energia általános lineáris kapcsolatát mutatja. Ennek speciális esetei a korábbiak.

Amennyiben több anyagfajta egyidejűleg van jelen, de egymással nem állnak kölcsönhatásban, akkor minden anyagfajta energia-impulzus tenzorára külön-külön érvényes a divergenciaegyenlet, ill. a belőle adódó skálafüggés.⁴ A fenti táblázatból látható, hogy a tágulás során a sugárzás energiasűrűsége csökken a leggyorsabban, ezt követi a nemrelativisztikus anyag, majd a görbület és végül a kozmológiai állandó. Ebből az következik, hogy a korai univerzum sugárzásdominált volt, majd (kb. 10 ezer évvel az Ősrobbanás után) anyagdominálttá vált, jelenleg pedig a megfigyelt gyorsuló tágulás szerint kozmológiai állandó dominált.

⁴Az első Friedmann-egyenlet megoldása természetesen ilyenkor már nem lesz egyszerű hatványfüggvény.