Bevezetés az általános relativitáselméletbe

Bene Gyula
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A

2002. december 13.

1 Előadás

Tematika: ld. http://arpad.elte.hu/~bene/

Ajánlott irodalom:

- Landau-Lifsic: Elméleti fizika II. Klasszikus erőterek (Tankönyvkiadó, 1976).
- Hraskó Péter: Bevezetés az általános relativitáselméletbe (Műegyetemi kiadó, 1997).
- Hraskó Péter: Relativitáselmélet (Typotex, 2002).
- Perjés Zoltán: Általános relativitáselmélet (ELTE Eötvös Kiadó, 1999).
- http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5

Eredeti cikkek:

Általános relativitáselmélet:

A.Einstein, Die Feldgleichungen der Gravitation, Berl. Ber. 44 (1915) 844.).

Eötvös Loránd szerepe. Az Eötvös-kísérlet, 1908-1909.

[1] R. v. Eötvös, Mathematishe und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, 8,65,1890.

[2] R. v. Eötvös, Verhandlungen der 16. Allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung (London-Cambridge, 21-29 September 1909)

[3] R. v. Eötvös, D. Pekár, E. Fekete: Beiträge zum Gesetz der Proportionalität von Trägheit und Gravität; a Beneke Alapítványhoz benyújtott pályamű, 1909.

1.1 Előzmény: a speciális relativitáselmélet (A.Einstein, 1905)

- Események, vonatkoztatási rendszer, inerciarendszer
- Lorentz-transzformáció

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

A klasszikus elektrodinamika egyenletei kovariánsak a Lorentz-transzformációra nézve (a transzformált mennyiségek közötti kapcsolat ugyanolyan alakú, mint amilyen a nem transzformált mennyiségek között volt).

→ A fénysebesség minden inerciarendszerben ugyanakkora. Michelson-kísérlet, 1881 és Michelson-Morley-kísérlet, 1887.

- Nincs kitüntetett inerciarendszer: a természet **minden** törvénye azonos alakú a különböző inerciarendszerekben (**relativitás elve**) → A Lorentz-transzformáció a téridő tulajdonságait jellemzi.

Ívhossz:

$$s^2 = c^2 t'^2 - \boldsymbol{r}'^2 = c^2 t^2 - \boldsymbol{r}^2$$

(Levezetések: az ívhossz invarianciája, Lorentz-transzformáció) Másképpen

$$s^2 = g_{ik} x^i x^k$$

ahol

$$x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$$

és

$$g_{ik} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Sajátidő:

$$\tau^2 = t^2 - \boldsymbol{r}^2/c^2$$

Minkowski-tér. Időszerű, térszerű, fényszerű ívhosszak.

- Az egyidejűség relativitása

$$x_1 \neq x_2,\ t_1 = t_2 \rightarrow t_1' \neq t_2' \tag{2}$$

A Lorentz-transzformáció szerint ui.

$$t_2' - t_1' = \frac{-\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3}$$

- Lorentz-kontrakció

Mozgó méterrúd végei (t,x) a K rendszerből mérve: $(0,0)$ és $(0,L)$

A K' (együttmozgó) rendszerben ugyanezek az események: $(0,0)$ és (t', L_0)

A Lorentz-transzformáció alapján

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4}$$

azaz

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{5}$$

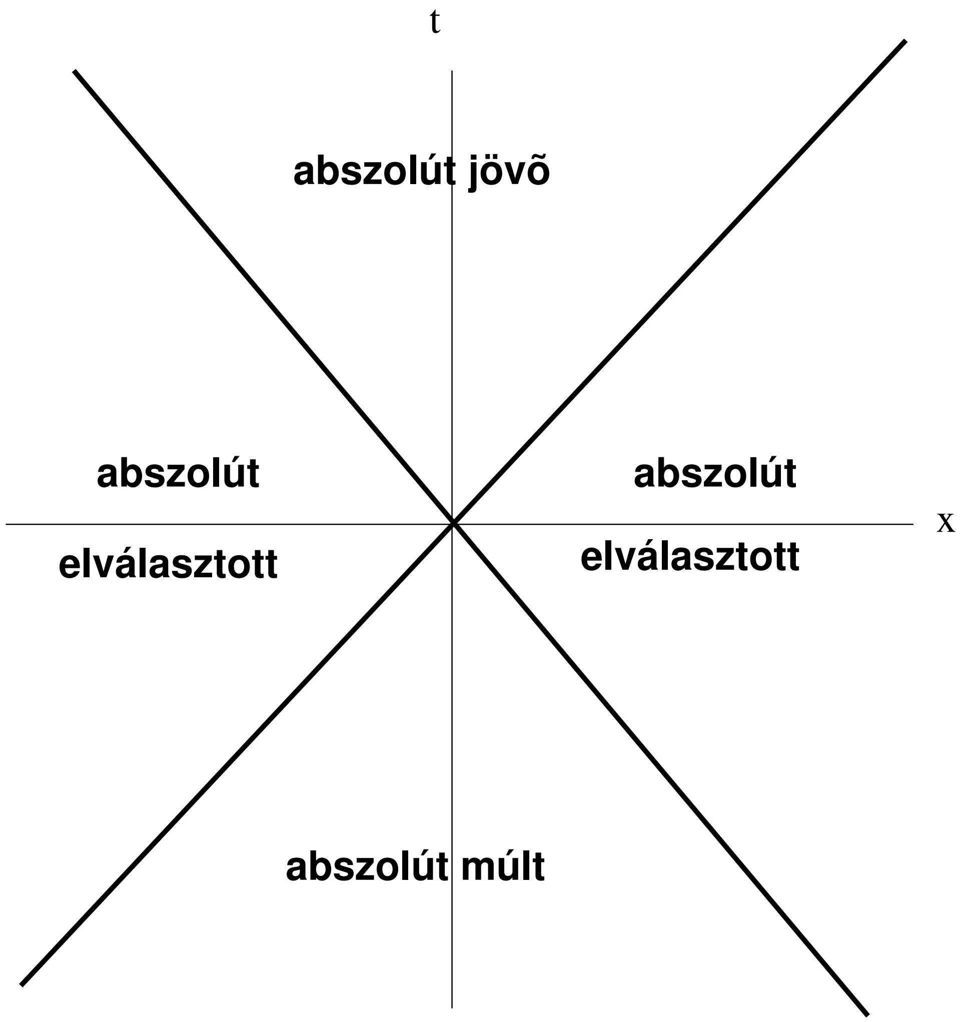
- Idődilatáció

Mozgó óra adott (0 ill. τ) mutatóállásai a K rendszerből mérve: $(0,0)$ és (t,x)

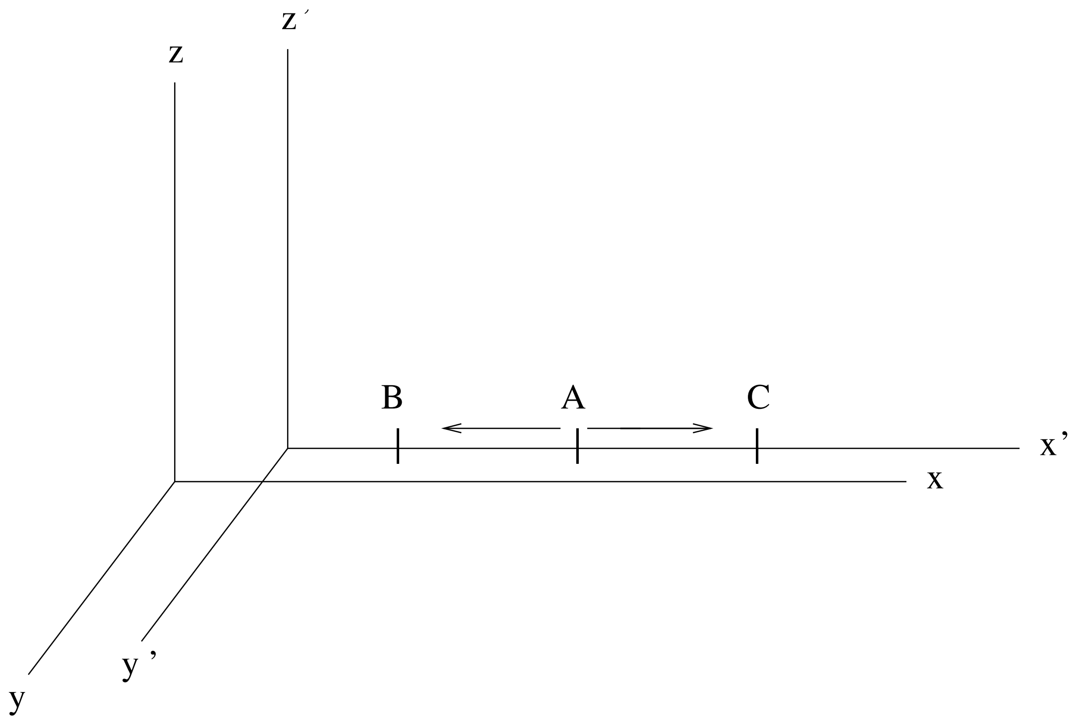
A K' (együttmozgó) rendszerben ugyanezek az események: $(0,0)$ és $(\tau,0)$

A Lorentz-transzformáció alapján

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{6}$$



ábra 1: A téridő egyes tartományainak kauzális kapcsolata az origóban történt eseménnyel.



ábra 2: Az **A** pontból kibocsájtott fényjelek a **K'** rendszerből mérve egyidejűleg érnek a **B** és **C** pontokba, míg a **K** rendszerből mérve különböző időpontokban.

- Ikerparadoxon
- Sebességek transzformációja

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}$$

$$v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}$$

  (a sebeség irányának megváltozása, fényaberráció)

- Négyesvektorok

  Az idő és a koordináták transzformációs szabálya szerint transzformálódó mennyiségek.

  t, x, y, z

  E, p_x, p_y, p_z

  ϕ, A_x, A_y, A_z

- Relativisztikus mechanika

  Négyessebesség:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau}$$

$$u_x = \frac{v}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$u_t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Négyesimpulzus:

$$p^i = mu^i$$

Az időszerű komponens az energia.

Legkisebb hatás elve.

$$S = -mc \int_a^b ds$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$c \to \infty$ határátmenet.

1.2 Gyorsuló koordinátarendszerek

- Az eredeti kérdésfeltevés: megfogalmazhatók-e a természeti törvények olyan alakban, amely tetszőleges koordinátatranszformációra nézve kovariáns?
- Forgó koordinátarendszer

  $$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t, y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t, z = z'$$

  Ívelemnégyzet:

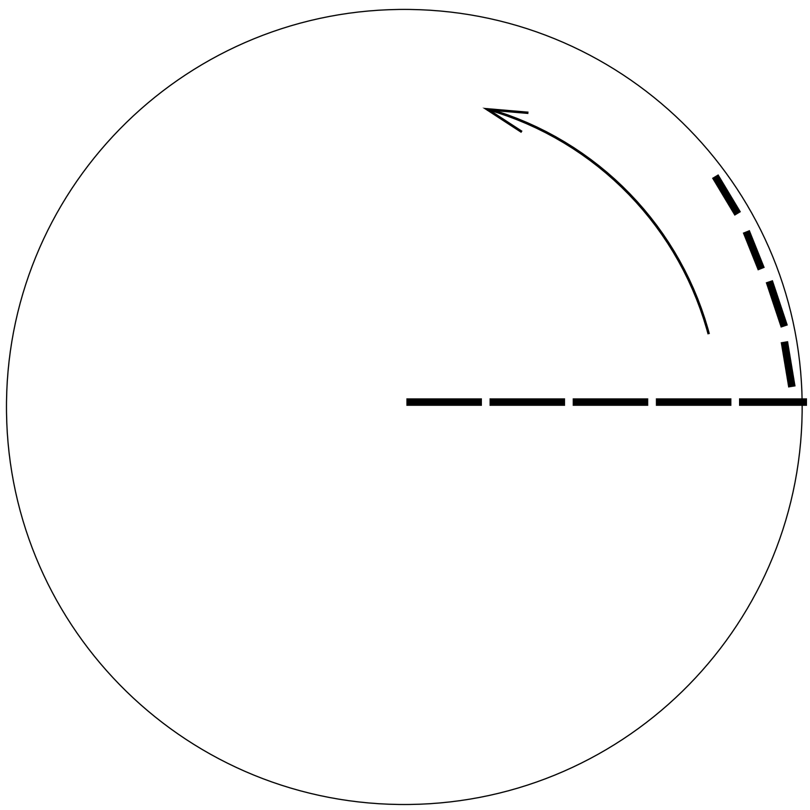
  $$ds^2 = \left[c^2 - \omega^2(x'^2 + y'^2)\right] dt^2 - dx^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\omega y' dx' dt - 2\omega x' dy' dt$$

  Az ívelemnégyzet invariáns (skalár), de a koordinátadifferenciálokkal kifejezett alakja más és más.
- Metrikus tenzor Általános esetben

  $$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

- Az ekvivalencia elve

  (Hasonlóságok és különbségek)



ábra 3: A forgó korong kerülete mentén elhelyezett mérőrudak Lorentz-kontrakciót szenvednek, míg a sugár mentén elhelyezett mérőrudak hossza változatlan.

- Görbevonalú koordináták

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$$

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k$$

Kontravariáns négyesvektor:

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k$$

Négyestenzorok. Kontravariáns metrikus tenzor:

$$g^{ik}$$

Jacobi-determináns:
(levezetés)

$$J = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)} = \frac{1}{\sqrt{-g}}$$

Invariáns térfogatelem:

$$\sqrt{-g} d\Omega$$

- Távolságok és időtartamok
  Adott pontban eltelt idő:
  (levezetés)

$$\tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{00}} dx^0$$

Két pont távolsága:

(levezetés)

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}}$$

$$\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}$$

- Egyidejűség, órák szinkronizálása
  (levezetés)

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}}$$

2 Előadás

2.1 Ismétlés

- Gyorsuló koordinátarendszerekben az ívelemnégyzet $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k \to$ görbevonalú koordináták
- Lokálisan a gravitációs tér gyorsuló rendszerrel ekvivalens (ekvivalencia elve)
- A gravitációs tér a téridő nem-Minkowski geometriájaként jelenik meg az általános relativitáselméletben
- A vonatkoztatási rendszer fogalma
- Kovariáns és kontravariáns négyesvektorok és négyestenzorok

2.2 Példa (távolságok, időtartamok, órák szinkronizálása): forgó vonatkoztatási rendszer

- Ívelemnégyzet:

$$ds^2 = (c^2 - \omega^2 r^2)dt^2 - 2\omega r^2 d\varphi dt - dz^2 - r^2 d\varphi^2 - dr^2$$

- Időtartam:

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}\, t$$

(→ vöröseltolódás)

- Szinkronizálás zárt görbe mentén nem lehetséges:

$$\Delta t = -\frac{1}{c}\oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha = \frac{1}{c^2}\oint \frac{\omega r^2 d\varphi}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} \approx \frac{\omega}{c^2}\oint r^2 d\varphi = \pm\frac{2\omega}{c^2}S$$

- Távolság:

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}$$

A kerület és a sugár aránya:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} > 2\pi$$

$\rightarrow$ nemeuklideszi geometria

2.3 Mozgás görbült téridőben

- A metrikus tenzor (g_{ik}) tulajdonságai (szimmetrikus, 10 független komponens, $+---$ szignatúra)
- Görbült téridő: a metrikus tenzor semmilyen koordinátatranszformációval nem hozható mindenütt Minkowski-alakra.
- Kovariáns differenciálás.
  -
    $$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k$$

    $$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k d\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx^l$$

    $\rightarrow dA_i$ nem transzformálódik vektorként!

    Ok: nem azonos pontbeli vektorokat vontunk ki egymásból.
  - Párhuzamos eltolás

    $$DA^i = (A^i + dA^i) - (A^i + \delta A^i) = dA^i - \delta A^i$$

Infinitezimális eltolás esetén δA^i homogén lineáris függvénye a vektorkomponenseknek és az eltolásnak:

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^k dx^l$$

Γ^i_{kl}: Christoffel-szimbólum ("affine connection"). Nem tenzor!

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k dx^l$$

– Kovariáns differenciál, kovariáns derivált:

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k \right) dx^l$$

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k \right) dx^l$$

$$A^i_{;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k$$

$$A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k$$

$$A^i_{k;l} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} - \Gamma^m_{kl} A^i_m + \Gamma^i_{ml} A^m_k$$

– A Christoffel-szimbólumok alsó indexeikben szimmetrikusak (levezetés)

– A Christoffel-szimbólumok és a metrikus tenzor kapcsolata

$$DA_i = g_{ik} DA^k$$

$$DA_i = D\left(g_{ik} A^k\right) = g_{ik} DA^k + A^k Dg_{ik}$$

$\rightarrow$ A metrikus tenzor kovariáns deriváltja nulla.

$$g_{ik;l} = 0$$

Ezt felhasználva

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right)$$

(levezetés)

– A kovariáns deriváltakra vonatkozó hasznos összefüggések

- Részecske mozgása gravitációs térben.

  A legkisebb hatás elve:

$$\delta S = -mc\delta \int ds = 0$$

  Mozgásegyenlet:

$$\frac{Du^i}{Ds} = 0$$

  (ahol $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ a négyessebesség), azaz

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0$$

- Hamilton-Jacobi-egyenlet

$$p^i = mcu^i$$

$$p_i p^i = m^2 c^2$$

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2c^2 = 0$$

- Fény terjedése

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kl}k^k k^l = 0$$

- Gyenge gravitációs tér
  Nemrelativisztikus Lagrange-függvény:

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi$$

$$ds^2 = (c^2 + 2\varphi)dt^2 - d\boldsymbol{r}^2$$

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

- Állandó gravitációs tér, gravitációs vöröseltolódás
  Sajátidőben mért frekvencia:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}} \approx \omega_0\left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right)$$

$$\Delta\omega = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}\omega$$

- Az elektromágnesség egyenletei gravitációs térben.
  Térerősségtenzor:

$$F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$

Négyes áramsűrűség:

$$j^i = \frac{\rho c}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx^i}{dx^0}$$

Maxwell-egyenletek:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0$$

$$F^{ik}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{-g} F^{ik}\right) = \frac{j^i}{\epsilon_0 c^2}$$

Töltött részecske mozgása elektromágneses és gravitációs erőtérben:

$$m \left(\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl} u^k u^l \right) = q F^{ik} u_k$$

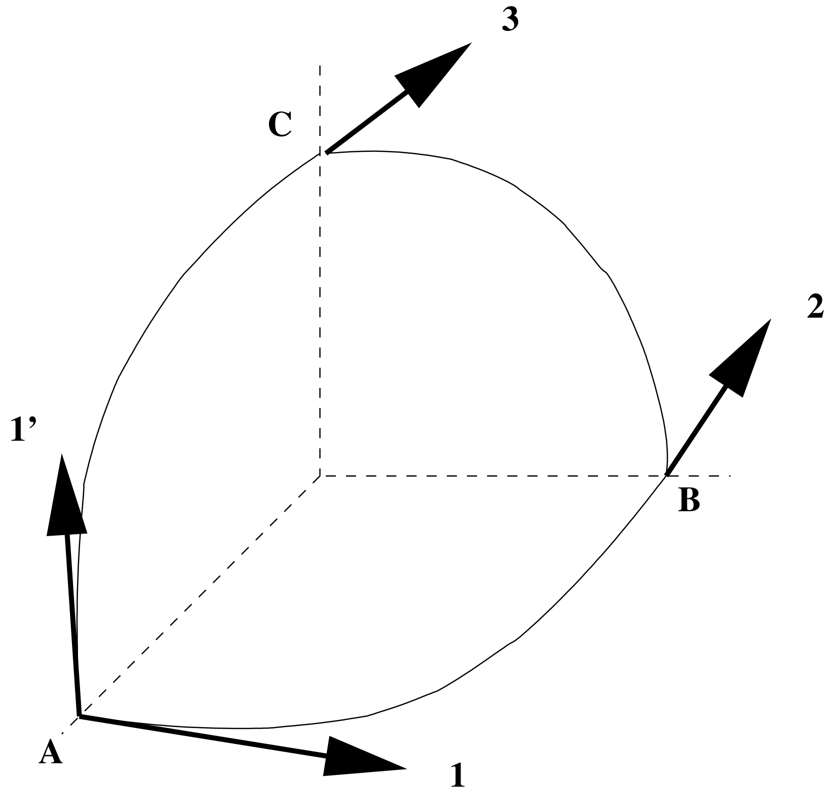
3 Előadás

3.1 Ismétlés

- Vektor megváltozása akkor transzformálódik vektorként, ha azonos pontban levő vektorokat vonunk ki egymásból.
- Vektor párhuzamos eltolása, Christoffel-szimbólumok, kovariáns deriváltak
- A Christoffel-szimbólumok alsó indexeikben szimmetrikusak
- A metrikus tenzor kovariáns deriváltja nulla
- $\rightarrow$ A Christoffel-szimbólumok kifejezhetők a metrikus tenzor deriváltjaival.
- Mozgás görbült téridőben, geodetikus mozgás
- A Maxwell-egyenletek általánosítása görbült téridőre

3.2 A görbületi tenzor

- Kérdés: milyen lokális mennyiség jelzi, hogy görbült a téridő?
- Vektor párhuzamos eltolása: a komponensek lokálisan Minkowski téridőben változatlanok.
- Párhuzamos eltolás során a pálya érintőjével bezárt szög állandó.
- Párhuzamos eltolás zárt görbe mentén
- $$\Delta A_k = \oint \Gamma^i_{kl} A_i dx^l$$
  $$\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma^n_{il} A_n$$
- Stokes tétele



ábra 4: Görbült felületen szakaszonként geodetikus zárt görbe mentén végzett párhuzamos eltolás eredménye nem egyezik meg a kiindulási vektorral.

- $$\Delta A_k = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\left(\Gamma^i_{km}A_i\right)}{\partial x^l} - \frac{\partial\left(\Gamma^i_{kl}A_i\right)}{\partial x^m}\right]\Delta f^{lm}$$

- $$\Delta A_k = \frac{1}{2}R^i_{klm}A_i\Delta f^{lm}$$

- $$R^i_{klm} = \frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}$$

- $$\Delta A^k = -\frac{1}{2}R^k_{ilm}A^i\Delta f^{lm}$$

- $$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = A_m R^m_{ikl}$$
- $$A^i_{;k;l} - A^i_{;l;k} = -A^m R^i_{mkl}$$
- A görbületi tenzor tulajdonságai
  - $$R_{iklm} = g_{in} R^n_{klm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right)$$
    $$+ g_{np}\left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im} - \Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right)$$
  - $$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml}$$
  - $$R_{iklm} = R_{lmik}$$
  - $$R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0$$
  - Bianchi-azonosság:
    $$R^n_{ikl;m} + R^n_{imk;l} + R^n_{ilm;k} = 0$$
    Bizonyítás lokálisan geodetikus rendszerben:
    $$R^n_{ikl;m} = \frac{\partial^2 R^n_{ikl}}{\partial x^m} = \frac{\partial^2 \Gamma^n_{il}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma^n_{ik}}{\partial x^m \partial x^l}$$
  - Ricci-tenzor:
    $$R_{ik} = g^{lm} R_{limk} = R^m_{imk}$$
    $$R_{ik} = R_{ki}$$
  - Invariáns görbület:
    $$R = g^{ik} R_{ik}$$

– Kétdimenziós eset:

$$R = \frac{2P_{1212}}{\gamma}$$

$$\frac{P}{2} = K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}$$

(levezetés)

– Weil-tenzor

$$C_{iklm} = R_{iklm} - \frac{1}{2} R_{il} g_{km} + \frac{1}{2} R_{im} g_{kl} + \frac{1}{2} R_{kl} g_{im} - \frac{1}{2} R_{km} g_{il} + \frac{1}{6} R \left(g_{km} g_{il} - g_{kl} g_{im} \right)$$

4 Előadás

4.1 Ismétlés

- A görbületi tenzor definíciója (zárt görbe mentén körbevitt vektor változásával arányos)
- A görbületi tenzor tulajdonságai (antiszimmetria az első ill. a második indexpárban, szimmetria az indexpárok felcserélésére, ciklikus összeg eltűnése, Bianchi-azonosság)
- Ricci-tenzor, skalár görbület, Weil-tenzor

4.2 Klasszikus térelméleti bevezető

$q(x, y, z, t)$: térmennyiség (pl. elektromágneses térerősség komponense, metrikus tenzor komponense)

$\Lambda\left(q, q_{,i}\right)$: Lagrange-sűrűség (a térmennyiségektől és azok koordináták szerinti ill. időderiváltjától függ, itt $q_{,i} = \frac{\partial q}{\partial x^i}$)

$$S = \int \Lambda\left(q, q_{,i}\right) d\Omega$$

$(d\Omega = c\; dV\; dt)$

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \delta q_{,i} \right] d\Omega = \int \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \delta q \right) - \delta q \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \right] d\Omega = 0$$

Euler-Lagrange-egyenlet (mozgásegyenlet):

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0$$

Energia- és impulzusmegmaradás:

Mivel a Langrange-sűrűség nem függ expliciten a koordinátáktól és az időtől,

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,k}}{\partial x^i}$$

A mozgásegyenletet felhasználva:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} q_{,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} q_{,k,i} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(q_{,i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\right)$$

Nullára redukálva:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(q_{,i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} - \delta_i^k \Lambda\right) = 0$$

Energia-impulzus-tenzor:

$$T_i^k = q_{,i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} - \delta_i^k \Lambda$$

A $\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0$ kontinuitási egyenletet a t_1 és t_2 időpontok közötti négyestérfogatra integráljuk:

$$\frac{dP^i}{dt} = 0$$

ahol

$$P^i = \int T^{ik} dS_k$$

a megmaradó négyesimpulzus.

T^{ik} határozatlan:

$$T^{ik} + \frac{\partial}{\partial x^l}\psi^{ikl}$$

is kielégíti a kontinuitási egyenletet, ha $\psi^{ikl} = -\psi^{ilk}$. A megmaradó négyesimpulzus értékét ez nem befolyásolja, mivel

$$\int \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^l} dS_k = \frac{1}{2}\int \left(dS_k \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^l} - dS_l \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}\int \psi^{ikl} df_{kl}^* = 0$$

ahol $df_{kl}^* = \epsilon_{klmn} df^{mn}$ a $df^{mn} = dx^{(1)m}dx^{(2)n} - dx^{(1)n}dx^{(2)m}$ négyes felületelem duálisa. A végtelen távoli felületen az integrandus eltűnik.

Az impulzusmomentum megmaradása (skalár térre):

Az impulzusmomentum négyestenzora:

$$J^{ik} = \int \left(x^i dP^k - x^k dP^i\right) = \int \left(x^i T^{kl} - x^k T^{il}\right) dS_l$$

Az impulzusmomentum megmaradása ekvivalens az impulzusmomentum-sűrűség négyesdivergenciájának eltűnésével:

$$0 = J^{ik}(t_2) - J^{ik}(t_1) = \oint \left(x^i T^{kl} - x^k T^{il}\right) dS_l = \int \frac{\partial}{\partial x^l}\left(x^i T^{kl} - x^k T^{il}\right) d\Omega$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^l}\left(x^i T^{kl} - x^k T^{il}\right) = 0$$

De

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\left(x^i T^{kl} - x^k T^{il}\right) = x^i \frac{\partial T^{kl}}{\partial x^l} - x^k \frac{\partial T^{il}}{\partial x^l} + \delta^i_l T^{kl} - \delta^k_l T^{il} = T^{ki} - T^{ik}$$

tehát az impulzusmomentum megmaradásából T^{ki} szimmetrikussága következik.

4.3 Előkészítés (néhány fontos azonosság levezetése)

Determináns deriváltja:

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\epsilon^{i_0,i_1,i_2,i_3} g_{0i_0} g_{1i_1} g_{2i_2} g_{3i_3} = \epsilon^{i_0,i_1,i_2,i_3} \frac{\partial g_{0i_0}}{\partial x^k} g_{1i_1} g_{2i_2} g_{3i_3} + \ldots$$

$\frac{\partial g_{0i_0}}{\partial x^k}$ együtthatója

$$\epsilon^{i_0,i_1,i_2,i_3} g_{1i_1} g_{2i_2} g_{3i_3}$$

a 0. sorhoz és i_0-ik oszlophoz tartozó előjeles aldetermináns, azaz $g\ g^{0i_0}$. (Hasonlóan a további tagokra.) Ezzel

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = g\ g^{ij}\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

Mivel $g_{ij} g^{ij} = \delta^j_j = 4$,

$$g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = -g_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}$$

A Christoffel-szimbólum definíciója,

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right)$$

alapján

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m} \right) = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k}$$

Vektor kovariáns négyesdivergenciája:

$$A^i_{;i} \equiv \frac{DA^i}{Dx^i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ki} A^k = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} A^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\ A^i \right)}{\partial x^i}$$

4.4 A gravitációs erőtér hatásintegrálja

- A gravitációs tér egyenletei a fizika más ágaiból nem vezethetők le (új fizikai törvények, 1916). Csupán analógiák használhatók motivációként: másodrendű téregyenleteket várunk (első deriváltak a Lagrange-sűrűségben), a Lagrange-sűrűség skalár, térmennyiségek: a metrikus tenzor komponensei.
- Probléma: A metrikus tenzor első deriváltjaiból (Christoffel-szimbólumokból) nem képezhető skalár, a rendelkezésre álló egyetlen nemtriviális skalár mennyiség, a skalár görbület (R) viszont második deriváltakat is tartalmaz. Megoldás: mivel R a második deriváltakat csak lineárisan tartalmazza, megmutatjuk, hogy

$$\int R\sqrt{-g} d\Omega = \int G\sqrt{-g} d\Omega + \int \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\ w^i \right)}{\partial x^i} d\Omega$$

ahol G csak a metrikus tenzor első deriváltjait tartalmazza. (A w^i mennyiség nem transzformálódik vektorként!). Tekintsük ehhez $R\sqrt{-g}$ kifejezésében a másodrendű deriváltakat tartalmazó tagokat:

$$R\sqrt{-g} = \sqrt{-g}\ g^{ki}\ R^m_{kmi} = \sqrt{-g}\ g^{ki} \left(\boldsymbol{\frac{\partial \Gamma^m_{ki}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^m_{km}}{\partial x^i}} + \Gamma^m_{nm}\Gamma^n_{ki} - \Gamma^m_{ni}\Gamma^n_{km} \right)$$

Második deriváltak csak a Christoffel-szimbólumok deriváltjaiban szerepelnek. Ezeket a tagokat tovább alakítva:

$$\sqrt{-g}\left(g^{km}\,\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^i}-g^{ki}\,\frac{\partial\Gamma^m_{km}}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\left[g^{km}\,\Gamma^i_{km}-g^{ki}\,\Gamma^m_{km}\right]\right)$$
$$-\left(\Gamma^i_{km}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\;g^{km}\right)}{\partial x^i}-\Gamma^m_{km}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\;g^{ki}\right)}{\partial x^i}\right)$$

Tehát

$$w^i=g^{km}\,\Gamma^i_{km}-g^{ki}\,\Gamma^m_{km}$$

és

$$G=g^{ki}\;\left(\Gamma^m_{nm}\Gamma^n_{ki}-\Gamma^m_{ni}\Gamma^n_{km}\right)+\frac{\Gamma^m_{km}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\;g^{ki}\right)}{\partial x^i}-\frac{\Gamma^i_{km}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\;g^{km}\right)}{\partial x^i}$$

A metrikus tenzor deriváltjait kifejezzük a Christoffel szimbólumokkal ($g^{ik}_{;l}=0$):

$$\frac{\partial g^{im}}{\partial x^l}=-\Gamma^i_{kl}\,g^{km}-\Gamma^m_{kl}\,g^{ik}$$

Kapjuk:

$$G=g^{ki}\;\left(\Gamma^m_{nm}\Gamma^n_{ki}-\Gamma^m_{ni}\Gamma^n_{km}\right)+\Gamma^m_{km}\,\Gamma^n_{in}\,g^{ki}-\Gamma^m_{km}\,\Gamma^i_{ni}\,g^{nk}-\Gamma^m_{km}\,\Gamma^k_{ni}\,g^{in}$$
$$\boldsymbol{-\Gamma^i_{km}\,\Gamma^n_{in}\,g^{km}}+\Gamma^i_{km}\,\Gamma^k_{ni}\,g^{nm}\boldsymbol{+\Gamma^i_{km}\,\Gamma^m_{ni}\,g^{kn}}$$

Tehát

$$G=g^{ki}\;\left(\Gamma^m_{ni}\Gamma^n_{km}-\Gamma^m_{nm}\Gamma^n_{ki}\right)$$

- A Lagrange-sűrűség

$$-\frac{c^3}{16\pi k}R\sqrt{-g}$$

A negatív előjel biztosítja, hogy a hatás pozitív definit legyen. $k=6.67\times 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}$ a gravitációs állandó.

4.5 Energia-impulzus-tenzor

- Új levezetést adunk az energia-impulzus-tenzorra, amely azonnal szimmetrikus T_{ik}-t eredményez
- Gondolatmenet:
  - Végtelen kis általános koordinátatranszformációt végzünk.
  - Ennek következtében az anyag hatásfüggvénye (mivel a Lagrange-sűrűség skalár) nem változhat, $\delta S = 0$.
  - Felírjuk a hatás koordinátatranszformációból eredő megváltozását és egyenlővé tesszük nullával.
  - Az anyagot jellemző térmennyiségek (pl. elektromágneses térerősségtenzor) kielégítik a mozgásegyenleteket, így a koordinátatranszformációból eredő megváltozásuk a hatás kifejezésében első rendben nem ad járulékot.
  - Csak a metrika megváltozása eredményez nemtriviális változást. Eredmény: egy szimmetrikus tenzor (T_{ik}) kovariáns négyesdivergenciája nulla. (Ez most nem jelenti automatikusan megmaradó mennyiség létezését!)
-
$$S = \frac{1}{c}\int \Lambda\sqrt{-g}\; d\Omega$$
- Infinitezimális koordinátatranszformáció:
$$x'^i = x^i + \xi^i$$
(ξ^i kicsi)
$$dx'^i = dx^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}dx^l = \left(\delta^i_l + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}\right)dx^l$$
-
$$g'^{ik}(x'^l) = g^{mn}(x^l)\left(\delta^i_m + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m}\right)\left(\delta^k_n + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^n}\right) \approx g^{ik}(x^l) + g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kn}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^n}$$

Átalakítjuk a baloldalt:

$$g'^{ik}(x'^l) = g'^{ik}(x^l + \xi^l) = g'^{ik}(x^l) + \frac{\partial g'^{ik}}{\partial x^l}\xi^l \approx g'^{ik}(x^l) + \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\xi^l$$

Végül tehát

$$g'^{ik}(x^l) = g^{ik}(x^l) - \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\xi^l + g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kn}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^n}$$

$$\begin{aligned}
\xi^{i;k} + \xi^{k;i} = g^{kn}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^n} + g^{km}\Gamma^i_{ml}\xi^l + g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{im}\Gamma^k_{ml}\xi^l \\
= g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kn}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^n} + \left(g^{km}g^{in} + g^{im}g^{kn}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{nm}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^n}\right)\xi^l \\
= g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kn}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^n} + g^{km}g^{in}\frac{\partial g_{nm}}{\partial x^l}\xi^l \\
= g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kn}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^n} - g^{km}g_{nm}\frac{\partial g^{in}}{\partial x^l}\xi^l \\
= g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kn}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^n} - \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\xi^l
\end{aligned}$$

Tehát

$$g'^{ik}(x^l) = g^{ik}(x^l) + \delta g^{ik}(x^l)\ , \qquad \delta g^{ik} = \xi^{i;k} + \xi^{k;i}$$

Hasonlóan (mivel $g'^{ik}g'_{kl} = \delta^i_l$)

$$g'_{ik}(x^l) = g_{ik}(x^l) + \delta g_{ik}(x^l)\ , \qquad \delta g_{ik} = -\xi_{i;k} - \xi_{k;i}$$

-

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\Lambda\right)}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik} + \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\Lambda\right)}{\partial\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)}\delta\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)\right\}d\Omega$$

$$= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\Lambda\right)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial \left(\sqrt{-g}\Lambda\right)}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)} \right) \right\} \delta g^{ik} \, d\Omega$$

- Legyen

$$T_{ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\Lambda\right)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial \left(\sqrt{-g}\Lambda\right)}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)} \right) \right\}$$

(Szimmetrikus!)

- Ekkor

$$\delta S = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} \, d\Omega$$

- δg^{ik} kifejezését behelyettesítve:

$$\delta S = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \left(\xi^{i;k} + \xi^{k;i}\right) \sqrt{-g} \, d\Omega$$

Másképpen:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{c} \int T_{ik} \xi^{i;k} \sqrt{-g} \, d\Omega = \frac{1}{c} \int T_i^k \xi^i_{;k} \sqrt{-g} \, d\Omega \\
&= \frac{1}{c} \int \left(T_i^k \xi^i\right)_{;k} \sqrt{-g} \, d\Omega - \frac{1}{c} \int \xi^i \, T^k_{i;k} \sqrt{-g} \, d\Omega
\end{aligned}$$

Az első tagban felhasználjuk a vektorok kovariáns négyesdivergenciájára vonatkozó azonosságot. Kapjuk:

$$\int \left(T_i^k \xi^i\right)_{;k} \sqrt{-g} \, d\Omega = \int \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{-g} \, T_i^k \xi^i\right) d\Omega$$

Ezt a négydimenziós Gauss-tétel segítségével átalakítva nullát kapunk.

- Marad:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int \xi^i \, T^k_{i;k} \, \sqrt{-g} \, d\Omega$$

Mivel ξ^i tetszőleges,

$$T^k_{i;k} = 0$$

következik. Ez sík téridőben az energia-impulzus-tenzor kontinuitási egyenletével azonos alakú.

5 Előadás

5.1 Ismétlés

- A gravitációs tér Lagrange-sűrűsége $-\frac{c^3}{16\pi k} R\sqrt{-g}$
- Az anyag szimmetrikus energia-impulzus tenzora

$$T_{ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\Lambda\right)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\Lambda\right)}{\partial\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)} \right) \right\}$$

-

$$T^k_{i;k} = 0$$

5.2 Példák energia-impulzus-tenzorra

- Elektromágneses tér

  Lagrange-sűrűség ($\sqrt{-g}$ nélkül):

$$\Lambda = -\frac{\epsilon_0}{4} F_{ik} F^{ik}$$

  Energia-impulzus-tenzor:

$$T_{ik} = \epsilon_0 \left(-F_{il} F^l_k + \frac{1}{4} F_{lm} F^{lm} g_{ik} \right)$$

- Makroszkopikus anyag (por, gáz, folyadék stb.)

$$T_{ik} = (p+\epsilon) u_i u_k - p\, g_{ik}$$

5.3 Az Einstein-egyenletek, származtatásuk, tulajdonságaik

- Variációs elv:

$$\delta(S_g + S_m) = 0$$

  A metrikus tenzor komponensei szerint variálunk.

-
$$\delta S_g \propto \delta \int R\sqrt{-g}d\Omega = \delta \int g^{ik} R_{ik}\sqrt{-g}d\Omega$$
$$= \int \left(R_{ik}\sqrt{-g}\delta g^{ik} + g^{ik}R_{ik}\delta\sqrt{-g} + g^{ik}\sqrt{-g}\delta R_{ik}\right) d\Omega$$

-
$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\; g_{ik}\; \delta g^{ik}$$

-
$$\delta \int R\sqrt{-g}d\Omega = \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}d\Omega + \int g^{ik}\delta R_{ik}\,\sqrt{-g}d\Omega$$

- Megmutatjuk, hogy a második tag eltűnik:
  - $\delta\Gamma^k_{il}A_k dx^l$ vektor, mert azonos pontokban levő vektorok különbsége. Eszerint $\delta\Gamma^k_{il}$ tenzor.
  - Lokálisan geodetikus rendszerben számolunk. Ekkor a metrikus tenzor első deriváltjai eltűnnek.
  -
  $$g^{ik}\delta R_{ik} = g^{ik}\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k}\delta\Gamma^l_{il}\right) = \frac{\partial w^l}{\partial x^l}$$
  ahol
  $$w^l = g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}$$
  - Általános esetben tehát
  $$g^{ik}\delta R_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\; w^l\right)}{\partial x^l}$$
  A Gauss-tételt alkalmazva bizonyítjuk az eredeti állítást.
- Tehát
$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int \left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}d\Omega$$

- Az anyag hatásintegráljának variációja (ld. az energia-impulzus-tenzor levezetését):

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} \, d\Omega$$

- Végül tehát a teljes variáció:

$$-\frac{c^3}{16\pi k} \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} \right) \delta g^{ik} d\Omega$$

amiből megkapjuk az **Einstein-egyenletek**et:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik}$$

Másképpen:

$$R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R = \frac{8\pi k}{c^4} T_i^k$$

Az indexeket összeejtve:

$$R = -\frac{8\pi k}{c^4} T$$

Ezért írhatjuk:

$$R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4} \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right)$$

- Az Einstein-egyenletek tulajdonságai

6 Előadás

6.1 Ismétlés

- Az Einstein-egyenletek levezetése variációs elvből:

$$\delta \int \left(\frac{1}{c}\Lambda - \frac{c^3}{16\pi k} R \right) \sqrt{-g} d\Omega = 0$$

(a metrikus tenzor komponensei szerint variálunk)

- $$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik}$$

- Az Einstein-egyenletek tulajdonságai (nemlinearitás, anyag és gravitációs tér kezdeti értékei nem függetlenek, csak a metrikus tenzor térszerű komponenseinek fordul elő a második időderiváltja, összesen nyolc független kezdeti feltétel adható meg)

6.2 Megmaradási tételek. Az energia, impulzus, impulzusmomentum, tömegközéppont megmaradása gravitációs térben.

- Görbült téridőben az energia-impulzus-tenzor a

$$T^{ik}_{;k} = 0$$

koninuitási egyenletnek tesz eleget, ami felírható

$$T^{k}_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(T^k_i \sqrt{-g} \right)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} T^{kl} = 0$$

alakban. Ebből nem következik megmaradási tétel!

- Magyarázat: csak a gravitációs tér és az anyag együttes energiája és impulzusa marad meg.
- A megmaradó, teljes négyesimpulzus meghatározása

Az Einstein-egyenletek felhasználásával olyan kifejezést keresünk, amely a gravitációs tér kikapcsolásakor (azaz lokálisan geodetikus rendszerben) az anyag T^{ik} energia-impulzus-tenzorába megy át, térfogati integrálja megmaradó mennyiség, és melynek általános esetben T^{ik}-tól való eltérése a metrikának legfeljebb első deriváltjaitól függ.

– Lokálisan geodetikus rendszerben számolunk (az adott pontban a metrikus tenzor első deriváltjai ill. a Christoffel-szimbólumok eltűnnek)
– Az adott pontban
$$T^{ik}_{;k} = \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0$$
– T^{ik}-t az Einstein-egyenletek segítségével
$$T^{ik} = \frac{\partial \eta^{ikl}}{\partial x^l}$$
alakra hozzuk (még mindig lokálisan geodetikus rendszerben), ahol
$$\eta^{ikl} = -\eta^{ilk}$$
(Ekkor a kontinuitási egyenlet azonosan teljesül.)
Ehhez
  ∗ kiindulunk az Einstein-egyenletekből:
$$T^{ik} = \frac{c^4}{8\pi k}\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)$$
  ∗ Felhasználjuk, hogy lokálisan geodetikus rendszerben
$$R^{ik} = \frac{1}{2}\, g^{im}g^{kp}g^{ln}\left\{\frac{\partial^2 g_{lp}}{\partial x^m \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^l \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{ln}}{\partial x^m \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^l \partial x^n}\right\}$$
  ∗ Kapjuk:
$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left\{\frac{c^4}{16\pi k}\frac{1}{(-g)}\frac{\partial}{\partial x^m}\left[(-g)\left(g^{ik}g^{lm} - g^{il}g^{km}\right)\right]\right\}$$
  $(\{..\} = \eta^{ikl})$

– Legyen

$$\lambda^{iklm} = \frac{c^4}{16\pi k}(-g)\left(g^{ik}g^{lm} - g^{il}g^{km}\right)$$

és

$$b^{ikl} = \frac{\partial}{\partial x^m}\lambda^{iklm}$$

$(\eta^{ikl} = \frac{1}{(-g)}b^{ikl})$

– Lokálisan geodetikus rendszerben

$$T^{ik} = \frac{1}{(-g)}\frac{\partial b^{ikl}}{\partial x^l}$$

vagy

$$(-g)T^{ik} = \frac{\partial b^{ikl}}{\partial x^l}$$

– Visszatérünk általános görbevonalú koordinátákra. Ekkor

$$(-g)\left(T^{ik} + t^{ik}\right) = \frac{\partial b^{ikl}}{\partial x^l}$$

ahol t^{ik} csak a metrikus tenzor első deriváltjaitól függ. Expliciten (T^{ik}-t ismét a téregyenletből véve):

$$\begin{aligned} t^{ik} = \frac{c^4}{16\pi k}\Big\{ &\left(g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm}\right)\left(2\Gamma^n_{lm}\Gamma^p_{np} - \Gamma^n_{lp}\Gamma^p_{mn} - \Gamma^n_{ln}\Gamma^p_{mp}\right) \\ &+ g^{il}g^{mn}\left(\Gamma^k_{lp}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^k_{mn}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^k_{np}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^k_{lm}\Gamma^p_{np}\right) \\ &+ g^{kl}g^{mn}\left(\Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^i_{mn}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^i_{np}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^p_{np}\right) \\ &+ g^{lm}g^{np}\left(\Gamma^i_{ln}\Gamma^k_{mp} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^k_{np}\right)\Big\} \end{aligned}$$

t^{ik} a gravitációs tér energia-impulzus pszeudotenzora.

– Mivel

$$b^{ikl} = -b^{ilk}$$

azonosan teljesül, hogy

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(-g)\left(T^{ik}+t^{ik}\right)=0$$

Emiatt

$$P^i=\frac{1}{c}\int(-g)\left(T^{ik}+t^{ik}\right)dS_k$$

megmaradó mennyiség. Ez az anyag és a gravitációs tér együttes “négyesimpulzusa”. (Ténylegesen nem négyesvektor, mivel a négyesvektorok a tér különböző pontjaiban különbözőképpen transzformálódnak, P^i pedig egy teljes háromdimenziós hiperfelülethez tartozik.)

- Mivel $(-g)\left(T^{ik}+t^{ik}\right)$ szimmetrikus az i,k indexekben, megmarad a négyes impulzusmomentum:

$$J^{ik}=\int\left(x^i dP^k-x^k dP^i\right)=\frac{1}{c}\int\left[x^i\left(T^{kl}+t^{kl}\right)-x^k\left(T^{il}+t^{il}\right)\right](-g)dS_l$$

- A tömegközéppont megmaradása a $J^{0\alpha}$ mennyiség megmaradásának felel meg:

$$x^0\int\left(T^{\alpha 0}+t^{\alpha 0}\right)(-g)dV-\int x^\alpha\left(T^{00}+t^{00}\right)(-g)dV=const.$$

Másképpen:

$$X^\alpha=const.'+\frac{P^\alpha}{P^0}x^0$$

ahol

$$X^\alpha=\frac{\int x^\alpha\left(T^{00}+t^{00}\right)(-g)dV}{\int\left(T^{00}+t^{00}\right)(-g)dV}$$

- A négyesimpulzus és a négyes impulzusmomentum kifejezése felületi integrálként:

$$P^i=\frac{1}{c}\int\frac{\partial b^{i0l}}{\partial x^l}dV=\frac{1}{c}\int\frac{\partial b^{i0\alpha}}{\partial x^\alpha}dV=\frac{1}{c}\oint b^{i0\alpha}df_\alpha$$

Hasonlóan belátható, hogy

$$J^{ik} = \frac{1}{c} \oint \left(x^i b^{k0\alpha} - x^k b^{i0\alpha} + \lambda^{i0\alpha k} \right) df_\alpha$$

- Nemrelativisztikus határeset:
  - $$T_i^k = \rho c^2 u_i u^k$$

    ahol a négyessebesség:

    $$u^\alpha = 0,\ u^0 = u_0 = 1$$
  - $$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$
  - $$R_0^0 = \frac{4\pi k}{c^2}\rho$$

    ahol

    $$R_0^0 \approx R_{00} = \frac{\partial \Gamma_{00}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{0l}^l}{\partial x^0} + \Gamma_{00}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{0l}^m \Gamma_{0m}^l \approx \frac{\partial \Gamma_{00}^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

    (az idő szerinti deriváltak elhanyagolhatóak a térkoordináták szerinti deriváltakhoz képest, $\frac{1}{c}\frac{\partial \ldots}{\partial t} \ll \frac{\partial \ldots}{\partial x^\alpha}$, valamint két Γ szorzata másodrendben kicsiny)

    $$\Gamma_{00}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha j} \left(2\frac{\partial g_{j0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} \right) \approx \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}$$

    Ezzel

    $$R_0^0 \approx \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{\alpha\,2}}$$
  - Végül a téregyenlet 0,0 komponense:

    $$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{\alpha\,2}} = \frac{4\pi k}{c^2}\rho$$

    azaz

    $$\triangle\varphi = 4\pi k\rho$$

– Ívelemnégyzet (levezetés később):

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2}{c^2}\varphi(\boldsymbol{r})\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2}{c^2}\varphi(\boldsymbol{r})\right) \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$$

Itt

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -k \sum_a \frac{m_a}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a|}$$

– Energia

– Impulzus

– Tömegközéppont

– Impulzusmomentum

7 Előadás

7.1 Ismétlés

- $$P^i = \frac{1}{c}\int (-g)\left(T^{i0} + t^{i0}\right) dV$$

  az anyag és a gravitációs tér megmaradó "négyesimpulzusa". t^{ik} a gravitációs tér energia-impulzus pszeudotenzora (lokálisan geodetikus rendszerben eltűnik).

- $$J^{ik} = \frac{1}{c}\int \left[x^i\left(T^{k0} + t^{k0}\right) - x^k\left(T^{i0} + t^{i0}\right)\right](-g)dV$$

  az anyag és a gravitációs tér megmaradó "négyes impulzusmomentuma". (J^{i0} megmaradása fejezi ki a tömegközéppont egyenesvonalú egyenletes mozgását).

- Nemrelativisztikus határesetben a newtoni gravitáció képleteit kapjuk vissza.

7.2 Gravitáló testek erőtere. Gömbszimmetrikus gravitációs tér. Schwarzschild metrika.

- Gömbszimmetria: a téridő-metrika a középponttól egyenlő távolságokban levő pontokban azonos. Az ívelemnégyzet legáltalánosabb gömbszimmetrikus kifejezése

  $$ds^2 = h(r,t)dr^2 + k(r,t)(\sin^2\Theta d\varphi^2 + d\Theta^2) + l(r,t)dt^2 + a(r,t)drdt$$

  Az $r = f_1(r', t')$, $t = f_2(r', t')$ alakú transzformációk megőrzik a gömbszimmetriát. Elérhető, hogy $a(r,t) = 0$ és $k(r,t) = -r^2$ legyen. Így az általánosságot nem csorbítva írhatjuk, hogy

  $$ds^2 = \mathrm{e}^{\nu}c^2dt^2 - r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2) - \mathrm{e}^{\lambda}dr^2$$

- $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \Theta$, $x^3 = \varphi$ választással a metrikus tenzor nullától különböző komponensei

  $$g_{00} = \mathrm{e}^{\nu},\ g_{11} = -\mathrm{e}^{\lambda},\ g_{22} = -r^2,\ g_{33} = -r^2\sin^2\Theta$$

ill.

$$g^{00} = \mathrm{e}^{-\nu},\ g^{11} = -\mathrm{e}^{-\lambda},\ g^{22} = -r^{-2},\ g^{33} = -r^{-2}\sin^{-2}\Theta$$

- A nullától különböző Christoffel-szimbólumok:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2},\ \Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{\nu'}{2},\ \Gamma^2_{33} = -\sin\Theta\cos\Theta$$

$$\Gamma^0_{11} = \frac{\dot{\lambda}}{2}\mathrm{e}^{\lambda-\nu},\ \Gamma^1_{22} = -r\mathrm{e}^{-\lambda},\ \Gamma^1_{00} = \frac{\nu'}{2}\mathrm{e}^{\nu-\lambda}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r},\ \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \coth\Theta,\ \Gamma^0_{00} = \frac{\dot{\nu}}{2}$$

$$\Gamma^1_{10} = \Gamma^1_{01} = \frac{\dot{\lambda}}{2},\ \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\Theta\mathrm{e}^{-\lambda}$$

(Itt $\nu' = \partial\nu/\partial r$ és $\dot{\nu} = \partial\nu/\partial t$)

- Ebből az Einstein-egyenletek:

$$-\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi k}{c^4}T^1_1$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\nu}\left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2}\right) = \frac{8\pi k}{c^4}T^2_2 = \frac{8\pi k}{c^4}T^3_3$$

$$-\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi k}{c^4}T^0_0$$

$$-\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{r} = \frac{8\pi k}{c^4}T^1_0$$

- Anyagmentes esetben (az erőteret létrehozó tömegen kívül) csak három független egyenlet van:

$$\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}=0$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=0$$

$$\dot{\lambda}=0$$

- A vákuumbeli egyenletek megoldása:
  - λ nem függ az időtől
  - $\lambda+\nu=F(t)$, ahol $F(t)$ nullává tehető az idő alkalmas $t=f(t')$ alakú transzformációjával
  - $$\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{\nu}=1+\frac{\text{const.}}{r}$$
  - Nagy távolságok esetén $g_{00}=1+\frac{2\varphi}{c^2}=1-\frac{2kM}{c^2r}$, ezért

$$\text{const.}=-r_g=-\frac{2kM}{c^2}$$

- Schwarzschild-metrika (K.Schwarzschild, 1916):

$$ds^2=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2-r^2(d\Theta^2+\sin^2\Theta d\varphi^2)-\frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}}$$

(térbeli metrika, kerület, sugár, időtartamok)

Nagy távolságban érvényes közelítő alak:

$$ds^2=ds_0^2-\frac{2kM}{c^2r}\left(dr^2+c^2dt^2\right)$$

- $$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi k}{c^4 r}\int_0^a T_0^0 r^2 dr = 1 - \frac{2kM}{c^2 r}$$

  $\rightarrow$

  $$M = \frac{4\pi}{c^2}\int_0^a T_0^0 r^2 dr$$

  (gravitációs tömeghiány)

7.3 Mozgás gömbszimmetrikus gravitációs térben. Perihélium-elfordulás, fénysugár-elgörbülés.

- Hamilton-Jacobi-egyenlet:

  $$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2c^2 = 0$$

  m az erőtérben mozgó részecske tömege.

- $$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial S}{c\partial t}\right)^2 - \left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - m^2c^2 = 0$$

- A megoldást

  $$S = -E_0 t + J\varphi + S_r(r)$$

  alakban keressük (E_0 és J állandó). Kapjuk:

  $$S_r(r) = \int\left[\frac{E_0^2}{c^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-2} - \left(m^2c^2 + \frac{J^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\right]^{1/2} dr$$

- Az $r = r(t)$ függést az $\partial S/\partial E_0 = \text{const.}$ egyenletből kapjuk:

  $$ct = \frac{E_0}{mc^2}\int\frac{dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left[\left(\frac{E_0}{mc^2}\right)^2 - \left(1+\frac{J^2}{m^2c^2r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\right]^{1/2}}$$

- A pályát a $\partial S/\partial J = \text{const.}$ egyenletből kapjuk:

$$\varphi = \frac{E_0}{mc^2}\int \frac{J\,dr}{r^2\left[\frac{E_0^2}{c^2} - \left(m^2c^2 + \frac{J^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\right]^{1/2}}$$

(elliptikus integrálra vezet)

- r_g/r szerint sorbafejtve kapjuk a **perihélium-elfordulás**t:

$$\delta\varphi = \frac{6\pi k^2 m^2 M^2}{c^2 J^2} = \frac{6\pi k M}{c^2 a(1-e^2)}$$

a az ellipszis nagytengelye, e az excentricitása.

- Fénysugár terjedése: $m = 0$ (eikonál-egyenlet)

$$\varphi = \int \frac{J\,dr}{r^2\left[\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\right]^{1/2}}$$

Itt $\rho = \frac{c\,J}{\omega_0}$ a szórási paraméter.

- Gravitációs térben tehát **a fénysugár elgörbül**. r_g/r szerint sorbafejtve kapjuk a fénysugár irányának megváltozását:

$$\delta\varphi = \frac{2r_g}{\rho} = \frac{4kM}{c^2\rho}$$

7.4 Gravitációs kollapszus.

- A Schwarzschild-metrika szingularitása nem jelenti a téridő szingularitását ($g = -r^4 \sin^2\Theta$ pl. nem szinguláris), csak azt, hogy $r < r_g$ esetén az r, Θ, φ merev koordinátarendszer valódi testekkel nem valósítható meg.

- Koordinátatranszformáció:

$$c\tau = \pm ct \pm \int \frac{f(r)dr}{1 - \frac{r_g}{r}},\ R = ct + \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) f(r)}$$

- Az új koordinátákban az ívelemnégyzet:

$$ds^2 = \frac{1-\frac{r_g}{r}}{1-f^2}\left(c^2 d\tau^2 - f^2 dR^2\right) - r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2)$$

$f(r) = \sqrt{r_g/r}$ választással a szingularitás eltűnik és szinkronizált koordinátarendszerhez jutunk:

$$R - c\tau = \int \frac{(1-f^2)dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)f} = \frac{2}{3}\frac{r^{3/2}}{r_g^{1/2}}$$

$$r = \left[\frac{3}{2}(R-c\tau)\right]^{2/3} r_g^{1/3}$$

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2r_g}(R-c\tau)\right]^{2/3}} - \left[\frac{3}{2}(R-c\tau)\right]^{4/3} r_g^{2/3}(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2)$$

- Schwarzschild-gömb:

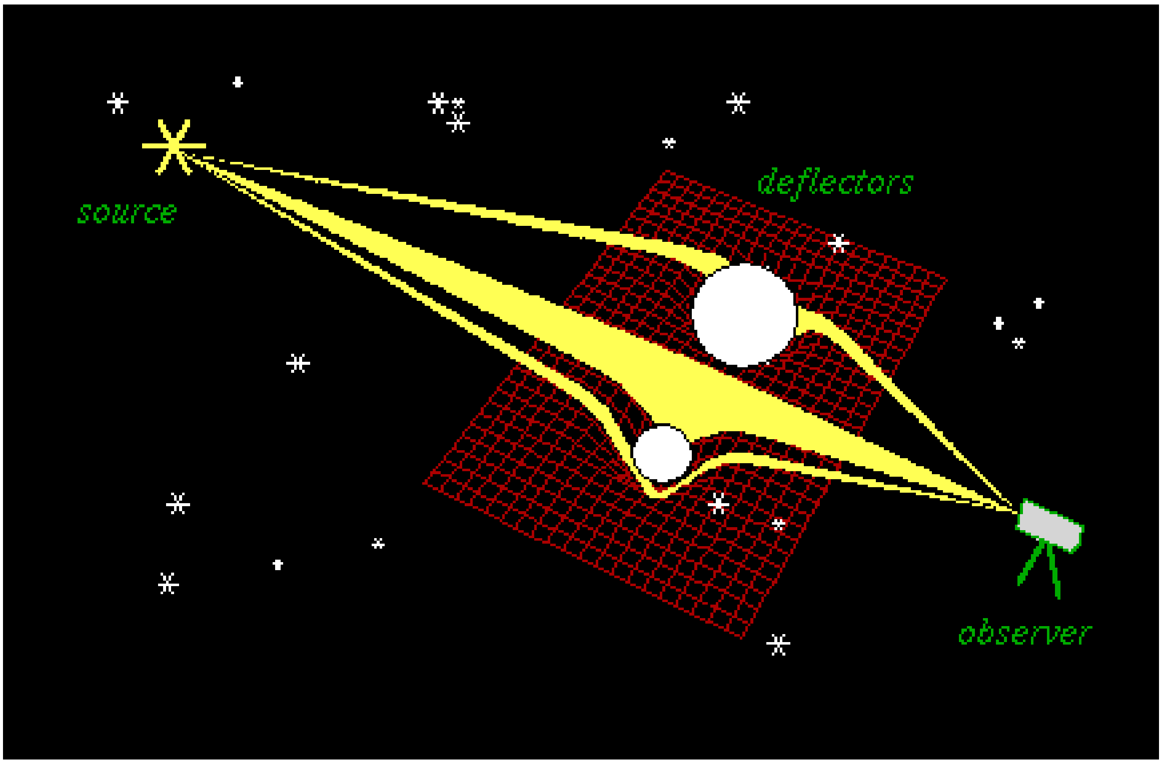
$$\frac{3}{2r_g}(R-c\tau) = r_g$$

8 Előadás

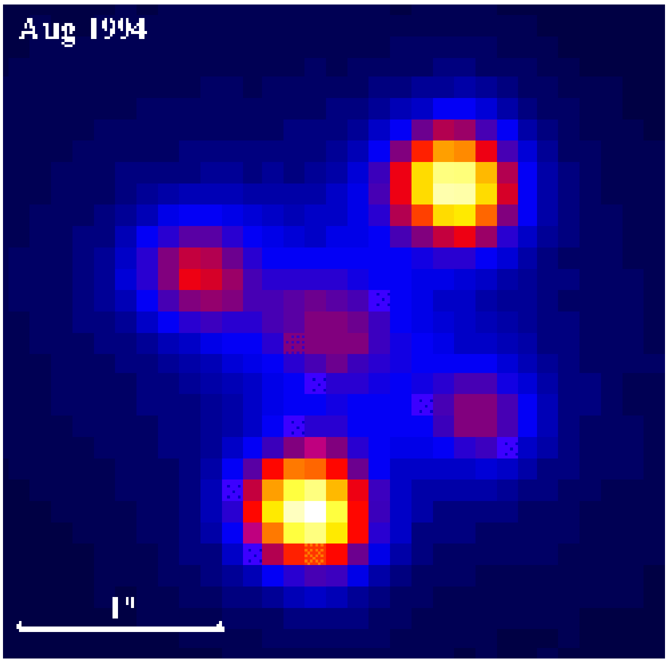
Az általános relativitáselmélet kísérleti bizonyítékai I. Fényelhajlás gravitációs térben, lencsézés. Perihélium-elfordulás. Gravitációs vöröseltolódás.

9 Előadás

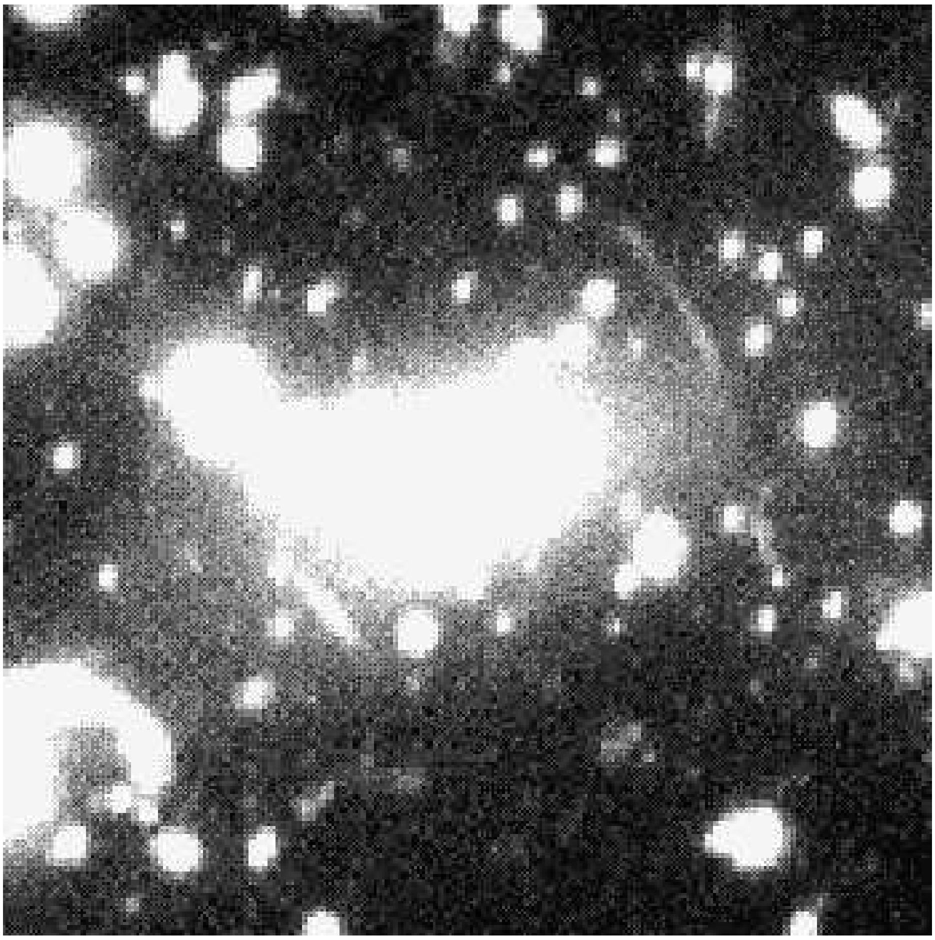
- Gravitációs lencsék



ábra 5: A lencsézés sematikus rajza



ábra 6: A 2237+0305 Einstein Kereszt (Geraint Lewis and Michael Irwin, William Hershel Telescope.)



ábra 7: Lencsézés okozta keresztek az A2219-ben.

9.1 Az általános relativitáselmélet kísérleti bizonyítékai II. Gravitációs hullámok: kettős rendszerek gravitációs sugárzása.

- Gyenge gravitációs hullámok
  - metrika:

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}$$

$(|h_{ik}w \ll 1)$

$$g^{ik} = g^{(0)}ik - h^{ik}$$
$$g = g^{(0)}$$

– infinitezimális koordinátatranszformáció hatása:

$$h'_{ik} = h_{ik} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i}$$

– mértékválasztás: alkalmas koordinátatranszformációval elérhető, hogy

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k}$$

$$\psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2} h \delta_i^k$$

$(h = h_i^i)$

- Gravitációs hullámok kisugárzása

  –

- A Hulse-Taylor kettőspulzár

10 Előadás

10.1 Relativisztikus kozmológia I. Homogén és izotrop tér. Friedmann-Robertson-Walker metrika. Zárt, nyílt, sík modell.

- A kozmológiai állandó bevezetésének lehetősége:

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int (R + 2\mathbf{\Lambda}) \sqrt{-g} d\Omega$$

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} + \mathbf{\Lambda} g_{ik}$$

- Homogén és izotrop tér: választható olyan világidő, amely adott pillanatában a tér metrikája minden pontban és minden irányban ugyanaz.

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

- Háromdimenziós görbületi tenzor és invariánsai homogén, izotrop térben:

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda \left(\gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - \gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} \right)$$

$$P_{\alpha\beta} = P^{\gamma}_{\alpha\gamma\beta} = 2\lambda\gamma_{\alpha\beta}$$

$$P = P^{\alpha}_{\alpha} = 6\lambda$$

A görbületi tulajdonságokat az egyetlen, térben állandó λ paraméter jellemzi.

$\lambda > 0$: állandó pozitív görbületű tér

$\lambda < 0$: állandó negatív görbületű tér

$\lambda = 0$: euklideszi tér

- Állandó pozitív görbületű homogén, izotrop tér metrikájának megkonstruálása:
  - Fiktív negyedik dimenzió (*ez nem az idő!*) bevezetésével a háromdimenziós görbült teret euklideszi négydimenziós térbeli gömbfelszínnel azonosítjuk:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2$$

  - A felületen levő ívelemnégyzet kifejezése:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$$

- a és λ kapcsolata:
  - Mivel az origó közelében

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{x^\alpha x^\beta}{a^2} \ ,$$

    az origóban a Christoffel-szimbólumok eltűnnek, így
  -

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 \gamma_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 \gamma_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}\right)$$

    amiből
  -

$$\lambda = \frac{P}{6} = \frac{1}{a^2}$$

- Az ívelemnégyzet gömbi koordinátákban:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2 \left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right)$$

- Valódi távolságok és térgeometria pozitív görbületű térben:
  - kör kerülete:
$$K = 2\pi r$$
  - kör sugara:
$$R = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}} = a \arcsin\left(\frac{r}{a}\right)$$
  - kerület és sugár aránya:
$$\frac{K}{R} = 2\pi \frac{\left(\frac{r}{a}\right)}{\arcsin\left(\frac{r}{a}\right)} < 2\pi$$

  $(x > \sin x \rightarrow \arcsin x > x)$
- Az ívelemnégyzet négydimenziós gömbi koordinátákban ($r = a \sin \chi$):
$$dl^2 = a^2 \left[d\chi^2 + \sin^2 \chi \left(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2\right)\right]$$
- Pozitív görbületű tér térfogata (=négydimenziós gömb felszíne):
$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} a^3 \sin^2 \chi \sin \theta d\chi d\theta d\varphi = 2\pi^2 a^3$$
- A pozitív görbületű tér zárt, benne az össztöltés, a teljes megmaradó négyesimpulzus és négyes impulzusmomentum is nulla. (A felületi integrálok ui. mindkét oldalon véges térfogatot határoló felületekre vonatkoznak, a két térrész járuléka a felületelem két ellentétes irányításának megfelelően csak előjelben különbözik.)
- Állandó negatív görbületű tér: $\lambda \rightarrow -\lambda$, $a \rightarrow i\ a$ ("képzetes sugarú gömbfelszín", tényleges geometriai beágyazás *hétdimenziós* térben lehetséges)
$$dl^2 = \frac{dr^2}{1+\frac{r^2}{a^2}} + r^2 \left(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2\right)$$
  ill. $r = a\mathrm{sh}\chi$ helyettesítéssel:
$$dl^2 = a^2 \left[d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi \left(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2\right)\right]$$

- Valódi távolságok és térgeometria negatív görbületű térben:
  - kör kerülete:
$$K = 2\pi r$$
  - kör sugara:
$$R = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}}} = a\text{ar sh}\left(\frac{r}{a}\right)$$
  - kerület és sugár aránya:
$$\frac{K}{R} = 2\pi \frac{\left(\frac{r}{a}\right)}{\text{ar sh}\left(\frac{r}{a}\right)} > 2\pi$$

  $(x < \text{sh}x \rightarrow \text{ar sh}x < x)$
- Negatív görbületű tér térfogata végtelen:
$$V = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi a^3 \text{sh}^2\chi \sin\theta d\chi d\theta d\varphi = \infty$$
- Zárt izotrop modell (az Einstein-egyenletek megoldása)
  - Négyes ívelemnégyzet:
$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2$$
  ahol a dl^2-beli a csak az idő függvénye. Időfüggését az Einstein-egyenletek határozzák meg.
  - konform időkoordináta bevezetése:
$$c\, dt = a\, d\eta$$
  Ezzel
$$ds^2 = a^2(\eta)\left(d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi\left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right)\right)$$
  -
$$g_{00} = a^2\ ,\ \ g_{11} = -a^2\ ,\ \ g_{22} = -a^2\sin^2\chi\ ,\ \ g_{33} = -a^2\sin^2\chi\sin^2\theta$$

—

$$\Gamma^0_{00} = \frac{a'}{a}\ , \quad \Gamma^0_{\alpha\beta} = -\frac{a'}{a^3} g_{\alpha\beta}\ , \quad \Gamma^\alpha_{0\beta} = -\frac{a'}{a}\delta^\alpha_\beta\ , \quad \Gamma^0_{\alpha 0} = \Gamma^\alpha_{00} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$$

—

$$R^0_0 = \frac{3}{a^4}\left(a'^2 - aa''\right)$$

$$R_{0\alpha} = 0$$

$$R^\beta_\alpha = -\frac{1}{a^4}\left(2a^2 + a'^2 + aa''\right)\delta^\beta_\alpha$$

—

$$R = R^0_0 + R^\alpha_\alpha = -\frac{6}{a^3}\left(a + a''\right)$$

—

$$T_{ik} = (p + \epsilon)u_i u_k - p g_{ik}$$

A választott vonatkoztatási rendszerben az anyag nyugalomban van, ezért

$$T^0_0 = \epsilon$$

így a (0,0) indexű Einstein-egyenletből ($R^0_0 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi k}{c^4}T^0_0$)

$$\frac{8\pi k}{c^4}\epsilon = \frac{3}{a^4}\left(a^2 + a'^2\right)$$

integrálva:

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a\sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4}\epsilon a^2 - 1}}$$

—

$$T^i_{0;i} = 0 \rightarrow \epsilon' + 3\frac{a'}{a}(\epsilon + p) = 0$$

Integrálva:

$$3\ln a = -\int \frac{d\epsilon}{p + \epsilon} + const.$$

– “Porszerű” anyag állapotegyenlete:

$$\epsilon = \mu c^2 \ , \quad p = 0$$

Ekkor

$$\mu a^3 = const. = \frac{M}{2\pi^2}$$
$$a = a_0(1 - \cos\eta)$$
$$a_0 = \frac{2kM}{3\pi c^2}$$
$$t = \frac{a_0}{c}(\eta - \sin\eta)$$

$\eta \ll 1$ esetén

$$a = \frac{1}{2}a_0\eta^2 \ , \quad t = \frac{1}{6c}a_0\eta^3$$
$$a = \left(\frac{9a_0c^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}$$
$$\mu = \frac{1}{6\pi k t^2}$$

– Ultrarelativisztikus anyag (pl. sugárzási tér) állapotegyenlete:

$$p = \frac{\epsilon}{3}$$

Ekkor

$$\mu a^4 = const. = \frac{3c^4a_1^2}{8\pi k}$$
$$a = a_1 \sin\eta$$
$$t = \frac{a_1}{c}(1 - \cos\eta)$$

$\eta \ll 1$ esetén

$$a = \sqrt{2a_1ct}$$
$$\frac{\epsilon}{c^2} = \frac{3}{32\pi k t^2}$$

- Nyílt izotrop modell
- Sík modell
- Tágulás, vöröseltolódás
- Relativisztikus kozmológia II. Kozmológiai állandó és következményei.

11 Előadás

- Friedmann-egyenlet:
  - Zárt modell:
$$\frac{8\pi k}{c^4}\epsilon = \frac{3}{a^4}\left(a^2 + a'^2\right)$$
  - Nyílt modell:
$$\frac{8\pi k}{c^4}\epsilon = \frac{3}{a^4}\left(-a^2 + a'^2\right)$$
  - Sík modell:
$$\frac{8\pi k}{c^4}\epsilon = \frac{3}{a^4}\left(a'^2\right)$$
  - Összefoglalva:
$$\frac{8\pi k}{c^4}\epsilon = \frac{3}{a^4}\left(\mathrm{K}a^2 + a'^2\right)$$
vagy
$$\frac{\mathrm{K}}{a^2H^2} = \Omega - 1$$
Itt K =1, -1 vagy 0 (zárt, nyílt ill. sík modell esetén),
$$H = \frac{da/dt}{a} = \frac{a\ da/dt}{a^2} = \frac{a'}{a^2}$$
a Hubble-"állandó",
$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$$
és
$$\rho_c = \frac{3H^2c^2}{8\pi k}$$
a kritikus tömegsűrűség.
  -
$$3\ln a = -\int \frac{d\epsilon}{\epsilon + p}$$
($T^i_{0;i} = 0$ miatt)

–
$$\frac{\frac{d^2a}{dt^2}}{a} = -\frac{4\pi k}{3c^4}(\epsilon + 3p)$$
(A $(0,0)$ indexű Einstein-egyenletből levonva a három (α, α) indexű Einstein-egyenletet)

11.1 Relativisztikus kozmológia II. Kozmológiai állandó és következményei. Infláció

- A kozmológiai állandó formálisan olyan energia-impulzus tenzornak felel meg, ahol az energiasűrűség
$$\epsilon_\Lambda = \frac{c^4}{8\pi k}\Lambda$$
és a nyomás
$$p_\Lambda = -\frac{c^4}{8\pi k}\Lambda$$
Negatív nyomás!
- Einstein-féle statikus univerzum-modell:
  - Zárt, statikus (időben állandó) modell
  - Kozmológiai állandót tartalmaz
  - Kis perturbációkra instabil
  - $$\epsilon + 3p = 0 \to \epsilon_m - 2\epsilon_\Lambda = 0 \to \mu = \frac{c^2}{4\pi k}\Lambda$$
  - $$\Lambda = \frac{1}{a^2}$$
- de Sitter-téridő:
  - A kozmológiai állandó dominál
  - Sík térmetrika

– Friedmann-egyenlet:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \rightarrow a = a_0 \mathrm{e}^{Ht}$$

(Most $H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} = const.$) **Exponenciális tágulás! (Infláció)**

– Zárt modell domináns kozmológiai állandóval:

$$a = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t - t_0)\right)$$

– Nyílt modell domináns kozmológiai állandóval:

$$a = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t - t_0)\right)$$

- Szögek és távolságok a táguló univerzumban
- Olbers-paradoxon
- Részecskehorizont, eseményhorizont

  A t_0 pillanatban a kauzális múlt határa:

$$d_H = a(t_0) \int_0^{t_0} \frac{c\,dt}{a(t)}$$

  A t_0 pillanat kauzális jövőjének határa (végtelen idő múlva):

$$r = \int_{t_0}^{\infty} \frac{c\,dt}{a(t)}$$

- Horizont-probléma, finomhangolás problémája, szerkezetkialakulás problémája
- Skalártér mint a gravitációs tér forrása, inflációs dinamika:

  –

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)$$

–

$$T^{\mu\nu} = \partial^{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - g^{\mu\nu}L$$

$$\epsilon = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) - \frac{1}{6}\left(\nabla\phi\right)^2$$

–

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \nabla^2\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0$$

– Az infláció vége, újramelegedés

12 Előadás

Relativisztikus kozmológia III. Skalártér mint a gravitációs tér forrása. Infláció.

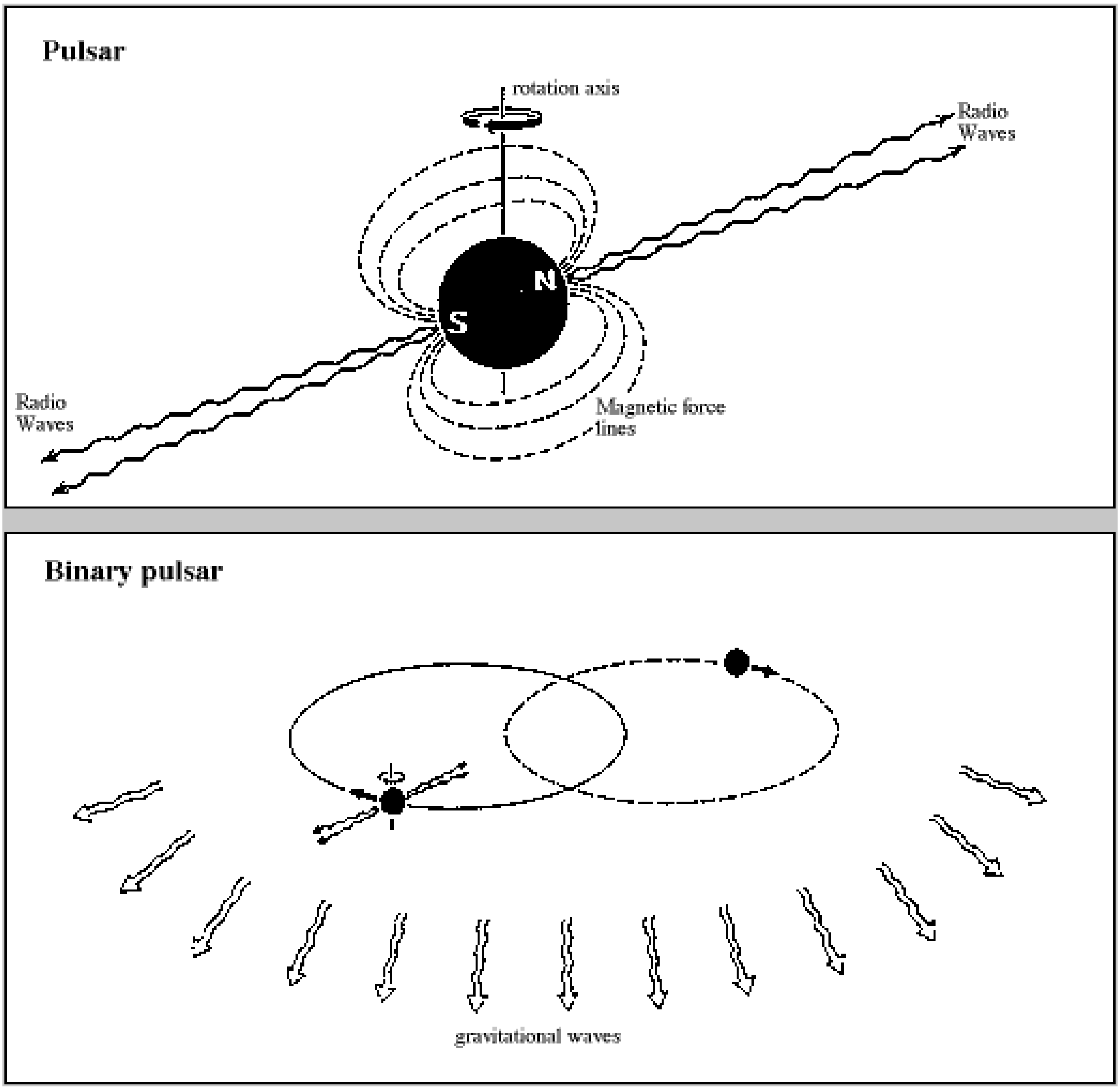
13 Előadás

Termodinamika gravitációs térben. Az univerzum entrópiája.

Hivatkozások

[1] Landau-Lifsic: Elméleti fizika II. Klasszikus erőterek (Tankönyvkiadó, 1976)

[2] Hraskó Péter: Relativitáselmélet (Typotex, 2002).



ábra 8: A kettőspulzár gravitációs hullámok kisugárzása révén energiát veszít

ábra 9: Az 1993. évi fizikai Nobel-díj