

I. zh pótlása:

Feladat:

Az

$$y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = x^3 e^{-x^2}$$

differenciálegyenlet homogén részének egyik partikuláris megoldása

$$e^{-x^2}.$$

Határozza meg

- a másik, lineárisan független partikuláris megoldást,
- az

$$y(1) = y'(2) = 0$$

peremfeltételekhez tartozó Green-függvényt,

- az inhomogén egyenlet előbbi peremfeltételekhez tartozó megoldását!

Megoldás:

Először a homogén egyenlet másik megoldását, y_2 -t keressük. A Wronsky-determináns

$$W = \exp\left(-\int 4x dx\right) = e^{-2x^2}$$

Mivel

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2,$$

$y_1 = e^{-x^2}$ -et behelyettesítve y_2 -re

$$e^{-x^2} y_2' + 2x e^{-x^2} y_2 = e^{-2x^2}$$

adódik. Ezt pl. a következőképpen oldhatjuk meg:

$$e^{-2x^2} (e^{x^2} y_2)' = e^{-2x^2}$$

$$(e^{x^2} y_2)' = 1$$

$$e^{x^2} y_2 = x$$

(az integrációs állandó elhagyható, mivel az y_1 számszorosát adja)

$$y_2 = x e^{-x^2}$$

A következő feladat y_1 és y_2 alkalmas lineárkombinációival olyan Y_1 és Y_2 megoldások szerkesztése, amelyek egyike az egyik, másika a másik határfeltételt teljesíti, tehát

$$Y_1(1) = Y_2'(2) = 0.$$

Y_1 nehézség nélkül felírható, pl.

$$Y_1 = y_2 - y_1 = (x - 1)e^{-x^2}$$

alakban. A másik határfeltételt teljesítő megoldást keressük

$$Y_2 = a y_1 - y_2 = (a - x)e^{-x^2}$$

alakban! Ekkor az Y_2 -re kirótt határfeltételből

$$Y_2'(2) = [-2x(a-x) - 1]e^{-x^2} \Big|_{x=2} = 0$$

adódik, azaz

$$(-4a + 7)e^{-4} = 0,$$

amiből

$$a = \frac{7}{4}.$$

Tehát

$$Y_2 = \left(\frac{7}{4} - x\right) e^{-x^2}.$$

Az Y_1, Y_2 megoldások Wronski-determinánsa:

$$\begin{aligned} W(Y_1, Y_2) &= Y_1 Y_2' - Y_1' Y_2 = (y_2 - y_1)(ay_1 - y_2)' - (y_2 - y_1)'(ay_1 - y_2) \\ &= (-a + 1)W(y_1, y_2) - aW(y_1, y_1) - W(y_2, y_2) \\ &= (-a + 1)W(y_1, y_2) = -\frac{3}{4}e^{-2x^2}. \end{aligned}$$

Mindezek segítségével a Green-függvény explicit alakban:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{4}{3} \left(\frac{7}{4} - x\right) (\xi - 1)e^{\xi^2 - x^2}, & \text{ha } 1 \leq \xi \leq x \\ -\frac{4}{3} \left(\frac{7}{4} - \xi\right) (x - 1)e^{\xi^2 - x^2}, & \text{ha } x \leq \xi \leq 2 \end{cases}$$

Az inhomogén egyenlet megoldása pedig

$$\begin{aligned} y &= \int_1^2 G(x, \xi) \xi^3 e^{-\xi^2} d\xi \\ &= -\frac{4}{3} \left(\frac{7}{4} - x\right) e^{-x^2} \int_1^x (\xi - 1) \xi^3 d\xi - \frac{4}{3} (x - 1) e^{-x^2} \int_x^2 \left(\frac{7}{4} - \xi\right) \xi^3 d\xi \\ &= -\frac{4}{3} \left(\frac{7}{4} - x\right) e^{-x^2} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{20}\right) - \frac{4}{3} (x - 1) e^{-x^2} \left(-\frac{7x^4}{16} + \frac{x^5}{5} + \frac{3}{5}\right) \\ &= \left(\frac{1}{20}x^5 - \frac{11}{15}x + \frac{41}{60}\right) e^{-x^2} \end{aligned}$$

II. zh pótlása:

1. feladat:

Határozza meg a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 t \quad (x \in \mathcal{R})$$

inhomogén hullámgörbe

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$$

kezdeti feltételekhez tartozó megoldását!

Megoldás:

Az egydimenziós inhomogén hullámgörbe megoldása jelen esetben

$$u = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \xi^2 \tau d\xi d\tau$$

alakba írható, amit kiértékelve

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\xi^3}{3} \Big|_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \tau d\tau \\
 &= \frac{1}{6} \int_0^t [(x+(t-\tau))^3 - (x-(t-\tau))^3] \tau d\tau \\
 &= \frac{1}{6} \int_0^t [6x^2(t-\tau) + 2(t-\tau)^3] \tau d\tau \\
 &= \int_0^t \left[x^2 t_1 + \frac{1}{3} t_1^3 \right] (t-t_1) dt_1 \\
 &= x^2 t \frac{t^2}{2} - x^2 \frac{t^3}{3} + \frac{1}{3} t \frac{t^4}{4} - \frac{1}{3} \frac{t^5}{5} = \frac{1}{6} x^2 t^3 + \frac{1}{60} t^5 \quad (1)
 \end{aligned}$$

2. feladat:

Határozza meg a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} - 2u = 0 \quad (x \in [-1, 1])$$

parciális differenciálegyenlet

$$u(x = \pm 1, t) = 0$$

peremfeltételekhez és

$$u(x, t = 0) = \sqrt{7} \cos\left(\frac{7}{2}\pi x\right)$$

kezdeti feltételhez tartozó megoldását!

Megoldás:

Az egyenlet szeparálható, ennek megfelelően keressünk megoldást először szorzatalakban:

$$u(x, t) = A(x)B(t)$$

Az egyenletbe beírva és u -val osztva:

$$\frac{A''}{A} - \frac{B'}{B} - 2 = 0$$

Az egyes tagok külön-külön állandók:

$$\frac{A''}{A} = -\kappa^2$$

$$\frac{B'}{B} = -\kappa^2 - 2$$

A egyenletéből:

$$A(x) = a \cos(\kappa x) + b \sin(\kappa x)$$

B egyenletéből:

$$B(t) = ce^{-(2+\kappa^2)t}$$

(a, b, c integrációs állandók) A határfeltételek teljesítéséhez

$$\kappa = \frac{2n-1}{2}\pi \quad (n \in \mathcal{N})$$

szükséges a koszinuszos ill.

$$\kappa = n\pi \quad (n \in \mathcal{N})$$

a szinuszos megoldás esetében. Ezzel a határfeltételeket teljesítő általános megoldás

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) \exp\left[-\left(2 + \left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2\right)t\right] + b_n \sin(n\pi x) \exp\left[-\left(2 + (n\pi)^2\right)t\right]$$

A kezdeti feltétel

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) + b_n \sin(n\pi x) = \sqrt{7} \cos\left(\frac{7}{2}\pi x\right),$$

ahonnan leolvasható, hogy minden b_n együttható nulla, valamint minden a_n együttható is nulla a_4 kivételével, ami

$$a_4 = \sqrt{7}.$$

Az együtthatók értékét az általános megoldásba beírva kapjuk a végeredményt:

$$u(x, t) = \sqrt{7} \cos\left(\frac{7}{2}\pi x\right) \exp\left[-\left(2 + \left(\frac{7}{2}\pi\right)^2\right)t\right]$$

3. feladat:

Határozza meg a

$$\Delta\Phi = 0$$

háromdimenziós Laplace-egyenlet

$$\Phi(r = R, \vartheta, \varphi) = U_0 \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

peremfeltételnek eleget tevő megoldását! Itt r, ϑ, φ a gömbi polárkoordináták. Emlékeztető: az első néhány gömbfüggvény alakja

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta$$

Megoldás:

A Laplace-egyenlet megoldása gömbi koordinátákban az $r^l Y_{lm}$, $r^{-(l+1)} Y_{lm}$ kifejezések lineárkombinációja. $r < R$ esetén az első, az origóban nem divergáló, $r > R$ esetén a második, végtelenben lecsengő alakot kell használnunk.

Mivel $\sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos \vartheta)$, vagyis Y_{00} és Y_{10} lineárkombinációja, a fentiek alapján közvetlenül felírhatjuk a határfeltételnek eleget tevő megoldást:

$r < R$ esetén:

$$\Phi = \frac{U_0}{2} \left(1 - \frac{r}{R} \cos \vartheta\right)$$

$r > R$ esetén:

$$\Phi = \frac{U_0}{2} \left(\frac{R}{r} - \frac{R^2}{r^2} \cos \vartheta\right)$$