A csoport:

1. feladat:
Határozza meg a
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin x \sin(2t) \quad (x \in \mathcal{R})$$
inhomogén hullámegyenlet
$$u|_{t=0} = 0 \ , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$
kezdeti feltételekhez tartozó megoldását!

Megoldás:
Az egydimenziós inhomogén hullámegyenlet megoldása jelen esetben
$$u = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \sin \xi \sin(2\tau) d\xi d\tau$$
alakba írható, amit kiértékelve
$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2} \int_0^t \left(-\cos \xi\right)\Big|_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \sin(2\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t \left[\cos(x-(t-\tau))\sin(2\tau) - \cos(x+(t-\tau))\sin(2\tau)\right] d\tau \\
&= \frac{1}{4} \int_0^t \left[\sin(3\tau + (x-t)) + \sin(\tau - (x-t)) - \sin(3\tau - (x+t)) - \sin(\tau + (x+t))\right] d\tau \\
&= -\frac{1}{12}\cos(x+2t) + \frac{1}{12}\cos(x-t) - \frac{1}{4}\cos(-x+2t) + \frac{1}{4}\cos(-x+t) \\
&\quad + \frac{1}{12}\cos(2t-x) - \frac{1}{12}\cos(-x-t) + \frac{1}{4}\cos(x+2t) - \frac{1}{4}\cos(x+t) \\
&= -\frac{1}{3}\sin x \sin(2t) + \frac{2}{3}\sin x \sin t = \frac{4}{3} \sin x \sin t \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

2. feladat:
Határozza meg a
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + u = 0 \quad (x \in [-1, 1])$$
parciális differenciálegyenlet
$$u(x = \pm 1, t) = 0$$
peremfeltételekhez és
$$u(x, t = 0) = \sqrt{3} \cos\left(\frac{9}{2}\pi x\right)$$
kezdeti feltételhez tartozó megoldását!

Megoldás:
Az egyenlet szeparálható, ennek megfelelően keressünk megoldást először szorzatalakban:
$$u(x,t) = A(x)B(t)$$
Az egyenletbe beírva és u-val osztva:
$$\frac{A''}{A} - \frac{B'}{B} + 1 = 0$$
Az egyes tagok külön-külön állandók:
$$\frac{A''}{A} = -\kappa^2$$

$$\frac{B'}{B} = -\kappa^2 + 1$$

A egyenletéből:

$$A(x) = a\cos(\kappa x) + b\sin(\kappa x)$$

B egyenletéből:

$$B(t) = c\mathrm{e}^{-(\kappa^2-1)t}$$

(a, b, c integrációs állandók) A határfeltételek teljesítéséhez

$$\kappa = \frac{2n-1}{2}\pi \quad (n \in \mathcal{N})$$

szükséges a koszinuszos ill.

$$\kappa = n\pi \quad (n \in \mathcal{N})$$

a szinuszos megoldás esetében. Ezzel a határfeltételeket teljesítő általános megoldás

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) \exp\left[-\left(\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2 - 1\right) t\right] + b_n \sin(n\pi x) \exp\left[-\left((n\pi)^2 - 1\right) t\right]$$

A kezdeti feltétel

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) + b_n \sin(n\pi x) = \sqrt{3}\cos\left(\frac{9}{2}\pi x\right) \ ,$$

ahonnan leolvasható, hogy minden b_n együttható nulla, valamint minden a_n együttható is nulla a_5 kivételével, ami

$$a_5 = \sqrt{3} \ .$$

Az együtthatók értékét az általános megoldásba beírva kapjuk a végeredményt:

$$u(x,t) = \sqrt{3}\cos\left(\frac{9}{2}\pi x\right) \exp\left[-\left(\left(\frac{9}{2}\pi\right)^2 - 1\right) t\right]$$

3. feladat:
Határozza meg a

$$\triangle\Phi = 0$$

háromdimenziós Laplace-egyenlet

$$\Phi(r = R, \vartheta, \varphi) = U_0 \cos\vartheta$$

peremfeltételnek eleget tevő megoldását

$$r < R$$

esetén! Itt r, ϑ, φ a gömbi polárkoordináták.

Néhány képlet segítségképpen:

- A Laplace-egyenlet független megoldásai gömbi polárkoordinátákban:

$$r^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \ , \quad r^{-(l+1)} Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \ .$$

- Néhány $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ gömbfüggvény explicit kifejezése:

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$$

$$Y_{1,\pm1} = \mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\,\mathrm{e}^{\pm i\varphi}$$

- $$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta,\varphi)Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi')$$

Megoldás:
$r < R$ esetén az origóban reguláris $r^l Y_{lm}$ megoldást kell használni. Mivel a határfeltételben szereplő $\cos\vartheta$ arányos az Y_{10} gömbfüggvénnyel, a megoldás

$$\Phi = U_0 \frac{r}{R}\cos\vartheta \; .$$

B csoport:

1. feladat:
Határozza meg a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos x \sin(2t) \quad (x \in \mathcal{R})$$

inhomogén hullámegyenlet

$$u|_{t=0} = 0 \; , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

kezdeti feltételekhez tartozó megoldását!

Megoldás:
Az egydimenziós inhomogén hullámegyenlet megoldása jelen esetben

$$u = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \cos\xi \sin(2\tau) d\xi d\tau$$

alakba írható, amit kiértékelve

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2}\int_0^t \sin\xi|_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \sin(2\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \left[\sin(x+(t-\tau))\sin(2\tau) - \sin(x-(t-\tau))\sin(2\tau)\right] d\tau \\
&= \frac{1}{4}\int_0^t \left[\cos(3\tau-(x+t)) - \cos(\tau+(x+t)) - \cos(\tau-(x-t)) + \cos(3\tau+(x-t))\right] d\tau \\
&= \frac{1}{12}\sin(2t-x) - \frac{1}{12}\sin(-x-t) - \frac{1}{4}\sin(x+2t) + \frac{1}{4}\sin(x+t) \\
&\quad -\frac{1}{4}\sin(-x+2t) + \frac{1}{4}\sin(-x+t) + \frac{1}{12}\sin(x+2t) - \frac{1}{12}\sin(x-t) \\
&= -\frac{1}{3}\cos x \sin(2t) + \frac{2}{3}\cos x \sin t = \frac{4}{3}\cos x \sin t \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \qquad (2)
\end{aligned}$$

2. feladat:
Határozza meg a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + u = 0 \quad (x \in [-1,1])$$

parciális differenciálegyenlet

$$u(x=0,t) = u(x=1,t) = 0$$

peremfeltételekhez és

$$u(x,t=0) = \pi \sin(3\pi x)$$

kezdeti feltételhez tartozó megoldását!

Megoldás:
Az egyenlet szeparálható, ennek megfelelően keressünk megoldást először szorzatalakban:

$$u(x,t) = A(x)B(t)$$

Az egyenletbe beírva és u-val osztva:

$$\frac{A''}{A} - \frac{B'}{B} + 1 = 0$$

Az egyes tagok külön-külön állandók:

$$\frac{A''}{A} = -\kappa^2$$

$$\frac{B'}{B} = -\kappa^2 + 1$$

A egyenletéből:

$$A(x) = a\cos(\kappa x) + b\sin(\kappa x)$$

B egyenletéből:

$$B(t) = c\mathrm{e}^{-(\kappa^2-1)t}$$

(a, b, c integrációs állandók) A határfeltételek a koszinuszos megoldás esetén nem teljesíthetők (az origóban ezek nem tűnnek el), a szinuszos megoldás esetében pedig a

$$\kappa = n\pi \quad (n \in \mathcal{N})$$

követelményre vezetnek. Ezzel a határfeltételeket teljesítő általános megoldás

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) \exp\left[-\left((n\pi)^2 - 1\right)t\right]$$

A kezdeti feltétel

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) = \pi\sin(3\pi x) \ ,$$

ahonnan leolvasható, hogy b_3 kivételével mindegyik b_n együttható nulla, továbbá

$$b_3 = \pi \ .$$

Az együtthatók értékét az általános megoldásba beírva kapjuk a végeredményt:

$$u(x,t) = \pi\sin(3\pi x)\exp\left[-\left(9\pi^2 - 1\right)t\right]$$

3. feladat:

Határozza meg a

$$\triangle\Phi = 0$$

háromdimenziós Laplace-egyenlet

$$\Phi(r = R, \vartheta, \varphi) = U_0\cos\vartheta$$

peremfeltételnek eleget tevő megoldását

$$r > R$$

esetén! Itt r, ϑ, φ a gömbi polárkoordináták.

Néhány képlet segítségképpen:

- A Laplace-egyenlet független megoldásai gömbi polárkoordinátákban:

$$r^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \ , \quad r^{-(l+1)}Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \ .$$

- Néhány $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ gömbfüggvény explicit kifejezése:

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$$

$$Y_{1,\pm1} = \mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\mathrm{e}^{\pm i\varphi}$$

- $$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}(\vartheta,\varphi)Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi')$$

Megoldás:
$r > R$ esetén a végtelenben lecsengő $r^{-(l+1)}Y_{lm}$ megoldást kell használni. Mivel a határfeltételben szereplő $\cos\vartheta$ arányos az Y_{10} gömbfüggvénnyel, a megoldás

$$\Phi = U_0\frac{R^2}{r^2}\cos\vartheta\ .$$

C csoport:

1. feladat:
Határozza meg a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathrm{e}^{-t} \quad (x \in \mathcal{R})$$

inhomogén hullámegyenlet

$$u|_{t=0} = 0\ , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

kezdeti feltételekhez tartozó megoldását!

Megoldás:
Az egydimenziós inhomogén hullámegyenlet megoldása jelen esetben

$$u = \frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\mathrm{e}^{-\tau}d\xi d\tau$$

alakba írható, amit kiértékelve

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\int_0^t \xi|_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\,\mathrm{e}^{-\tau}d\tau \\ &= \int_0^t (t-\tau)\mathrm{e}^{-\tau}d\tau \\ &= \int_0^t t_1\mathrm{e}^{t_1-t}dt_1 \\ &= (t_1-1)\,\mathrm{e}^{t_1-t}\big|_0^t = t-1+\mathrm{e}^{-t} \qquad (3) \end{aligned}$$

2. feladat:
Határozza meg a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} - u = 0 \quad (x \in [-1,1])$$

parciális differenciálegyenlet

$$u(x=\pm 1, t) = 0$$

peremfeltételekhez és

$$u(x, t=0) = \sqrt{2}\sin(3\pi x)$$

kezdeti feltételhez tartozó megoldását!

Megoldás:
Az egyenlet szeparálható, ennek megfelelően keressünk megoldást először szorzatalakban:

$$u(x,t) = A(x)B(t)$$

Az egyenletbe beírva és u-val osztva:

$$\frac{A''}{A} - \frac{B'}{B} - 1 = 0$$

Az egyes tagok külön-külön állandók:

$$\frac{A''}{A} = -\kappa^2$$

$$\frac{B'}{B} = -\kappa^2 - 1$$

A egyenletéből:

$$A(x) = a\cos(\kappa x) + b\sin(\kappa x)$$

B egyenletéből:

$$B(t) = c\mathrm{e}^{-(\kappa^2+1)t}$$

(a, b, c integrációs állandók) A határfeltételek teljesítéséhez

$$\kappa = \frac{2n-1}{2}\pi \quad (n \in \mathcal{N})$$

szükséges a koszinuszos ill.

$$\kappa = n\pi \quad (n \in \mathcal{N})$$

a szinuszos megoldás esetében. Ezzel a határfeltételeket teljesítő általános megoldás

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) \exp\left[-\left(\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2 + 1\right)t\right] + b_n \sin(n\pi x) \exp\left[-\left((n\pi)^2 + 1\right)t\right]$$

A kezdeti feltétel

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) + b_n \sin(n\pi x) = \sqrt{2}\sin(3\pi x) \ ,$$

ahonnan leolvasható, hogy minden a_n együttható nulla, valamint minden b_n együttható is nulla b_3 kivételével, ami

$$b_3 = \sqrt{2}\ .$$

Az együtthatók értékét az általános megoldásba beírva kapjuk a végeredményt:

$$u(x,t) = \sqrt{2}\sin(3\pi x)\exp\left[-\left(9\pi^2+1\right)t\right]$$

3. feladat:
Határozza meg a

$$\triangle\Phi = 0$$

háromdimenziós Laplace-egyenlet

$$\Phi(r = R, \vartheta, \varphi) = U_0 \sin\vartheta \sin\varphi$$

peremfeltételnek eleget tevő megoldását

$$r < R$$

esetén! Itt r, ϑ, φ a gömbi polárkoordináták.

Néhány képlet segítségképpen:

- A Laplace-egyenlet független megoldásai gömbi polárkoordinátákban:

$$r^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\ , \quad r^{-(l+1)} Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\ .$$

- Néhány $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ gömbfüggvény explicit kifejezése:

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$$

$$Y_{1,\pm1} = \mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\mathrm{e}^{\pm i\varphi}$$

- $$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}(\vartheta,\varphi)Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi')$$

Megoldás:
$r<R$ esetén az origóban reguláris $r^l Y_{lm}$ megoldást kell használni. Mivel a határfeltételben szereplő $\sin\vartheta\sin\varphi$ az $Y_{1,1}$ és $Y_{1,-1}$ gömbfüggvények lineárkombinációja, a megoldás

$$\Phi=U_0\frac{r}{R}\sin\vartheta\sin\varphi\ .$$

D csoport:

1. feladat:
Határozza meg a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=xt^2\quad(x\in\mathcal{R})$$

inhomogén hullámegyenlet

$$u|_{t=0}=0\ ,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

kezdeti feltételekhez tartozó megoldását!

Megoldás:
Az egydimenziós inhomogén hullámegyenlet megoldása jelen esetben

$$u=\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\xi\tau^2 d\xi d\tau$$

alakba írható, amit kiértékelve

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\int_0^t \left.\frac{\xi^2}{2}\right|_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\tau^2 d\tau \\ &= x\int_0^t (t-\tau)\tau^2 d\tau = x\left(t\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}\right)=\frac{1}{12}xt^4 \end{aligned} \tag{4}$$

2. feladat:
Határozza meg a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}-u=0\quad(x\in[-1,1])$$

parciális differenciálegyenlet

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x=0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(x=2,t)=0$$

peremfeltételekhez és

$$u(x,t=0)=\pi\cos\left(\frac{9}{2}\pi x\right)$$

kezdeti feltételhez tartozó megoldását!

Megoldás:
Az egyenlet szeparálható, ennek megfelelően keressünk megoldást először szorzatalakban:

$$u(x,t)=A(x)B(t)$$

Az egyenletbe beírva és u-val osztva:

$$\frac{A''}{A}-\frac{B'}{B}-1=0$$

Az egyes tagok külön-külön állandók:

$$\frac{A''}{A}=-\kappa^2$$

$$\frac{B'}{B} = -\kappa^2 - 1$$

A egyenletéből:

$$A(x) = a\cos(\kappa x) + b\sin(\kappa x)$$

B egyenletéből:

$$B(t) = c\mathrm{e}^{-(\kappa^2+1)t}$$

(a, b, c integrációs állandók) A határfeltételek a szinuszos megoldás esetében nem teljesíthetők, mert a derivált az origóban nem tűnik el, a koszinuszos megoldás esetén pedig a

$$\kappa = n\frac{\pi}{2} \quad (n \in \mathcal{N})$$

követelményre vezetnek. Ezzel a határfeltételeket teljesítő általános megoldás

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right) \exp\left[-\left(\left(n\frac{\pi}{2}\right)^2 + 1\right)t\right]$$

A kezdeti feltétel

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right) = \pi\cos\left(\frac{9}{2}\pi x\right) ,$$

ahonnan leolvasható, hogy minden a_n együttható nulla a_9 kivételével, ami

$$a_9 = \pi \ .$$

Az együtthatók értékét az általános megoldásba beírva kapjuk a végeredményt:

$$u(x,t) = \pi\cos\left(\frac{9}{2}\pi x\right) \exp\left[-\left(\frac{81}{4}\pi^2 + 1\right)t\right]$$

3. feladat:

Határozza meg a

$$\triangle\Phi = 0$$

háromdimenziós Laplace-egyenlet

$$\Phi(r = R, \vartheta, \varphi) = U_0 \sin\vartheta\sin\varphi$$

peremfeltételnek eleget tevő megoldását

$$r > R$$

esetén! Itt r, ϑ, φ a gömbi polárkoordináták.

Néhány képlet segítségképpen:

- A Laplace-egyenlet független megoldásai gömbi polárkoordinátákban:

$$r^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \ , \quad r^{-(l+1)} Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \ .$$

- Néhány $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ gömbfüggvény explicit kifejezése:

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$$

$$Y_{1,\pm1} = \mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\mathrm{e}^{\pm i\varphi}$$

- $$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta,\varphi) Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi')$$

Megoldás:

$r > R$ esetén a végtelenben lecsengő $r^{-(l+1)}Y_{lm}$ megoldást kell használni. Mivel a határfeltételben szereplő $\sin\vartheta\sin\varphi$ az $Y_{1,1}$ és $Y_{1,-1}$ gömbfüggvények lineárkombinációja, a megoldás

$$\Phi = U_0\frac{R^2}{r^2}\sin\vartheta\sin\varphi \ .$$