Hubert Györgyné: Kúpszeletek elemi úton

(9. és 10. osztályosokból álló csoport kétszer másfél órás foglalkozására.)

1.1 Ellipszis, hiperbola és parabola definíciója távolság-korlátozással. (Utalás a kör definíciójára is.)

Külső pont, belső pont...

Pontok szerkesztése → a görbék szimmetriái.

1.2 Feladat (vagy egyenértékű definíció is lehetne): rögzített kört vagy egyenest érintő és rögzített ponton átmenő körök középpontjainak mértani helye...

2.1 A kúpszeletek érintői: egy közös pontjuk van a görbével, az egyenes többi pontja külső pont.

Állítás: a vezérsugarak külső (vagy belső) szögfelezői érintők.

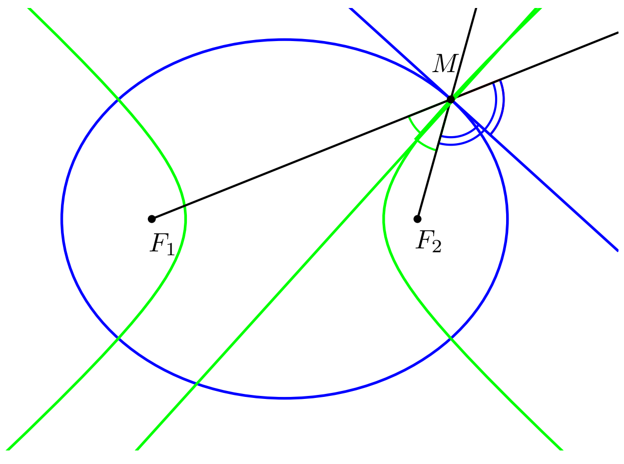
(azt nem bizonyítottuk, hogy egy görbe- pontban csak egy érintő húzható.)

2.2 Vezéralakzatok, főalakzat mindhárom görbénél

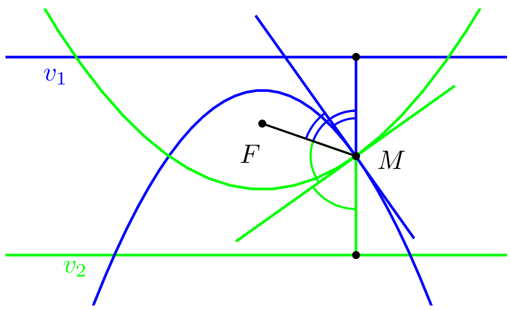
(A hiperbola esetében a ,,problémás pontokra" csak utalás történt, az idő rövidsége miatt egyáltalán nem foglalkoztam a hiperbola aszimptotáival, sőt a továbbiakban elsősorban csak az ellipszis és parabola néhány szép tulajdonságával...)

3. Feladatok:

3.1 Két közös fókuszú ellipszis és hiperbola derékszögben metszi egymást.



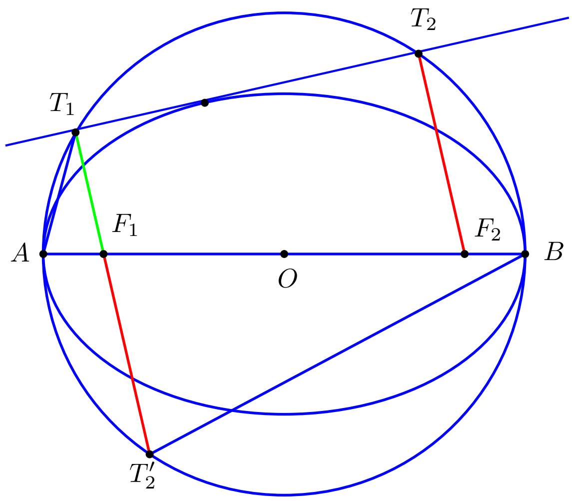
3.2 Két közös fókuszú, párhuzamos vezéregyenesű, ,,ellentétes állású" parabola derékszögben metszi egymást.



3.3 *Feladat lehetne: Ha két közös vezéregyenesű parabola két pontban metszi egymást, a metszéspontokat összekötő egyenes a fókuszok szakaszfelező merőlegese.*

3.4 Ellipszisnél és hiperbolánál a két fókusz egy tetszőleges érintőtől mért távolságának szorzata konstans. *(ez, mint ,,kedvenc" feladatom, ,,csokis" házi feladat.)*

A feladat megoldása:



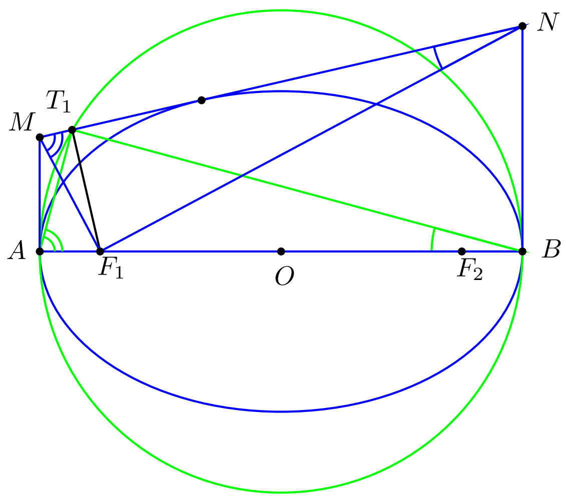
Tükrözzük az F_2T_2 szakaszt O-ra. A tükörkép (az ellipszis és a főkör szimmetriája és a centrális tükrözés tulajdonságai miatt) a T_1F_1 egyenesre esik.

Így a két távolság szorzata az F_1 pont főkörre vonatkozó hatványának abszolút értéke. (Ha ezt a tételt nem ismerik, úgy az AT_1F_1 és $T_2'BF_1$ háromszögek hasonlóságából is következik az állítás.)

A tétel bizonyítása hiperbola esetén ugyanígy történhet.

3.5 Kör, ellipszis, hiperbola esetében a két ,,csúcsérintő” által tetszőleges érintőből kimetszett szakasz bármely fókuszból derékszögben látszik.

E feladat megoldásában az a szép, hogy mindhárom görbére a bizonyítás szinte ugyanaz. Kör esetében e feladat viszont közismert. (A másik két görbénél felhasználjuk, hogy a fókusz tetszőleges érintőre vett merőleges vetülete a főkörre esik.)



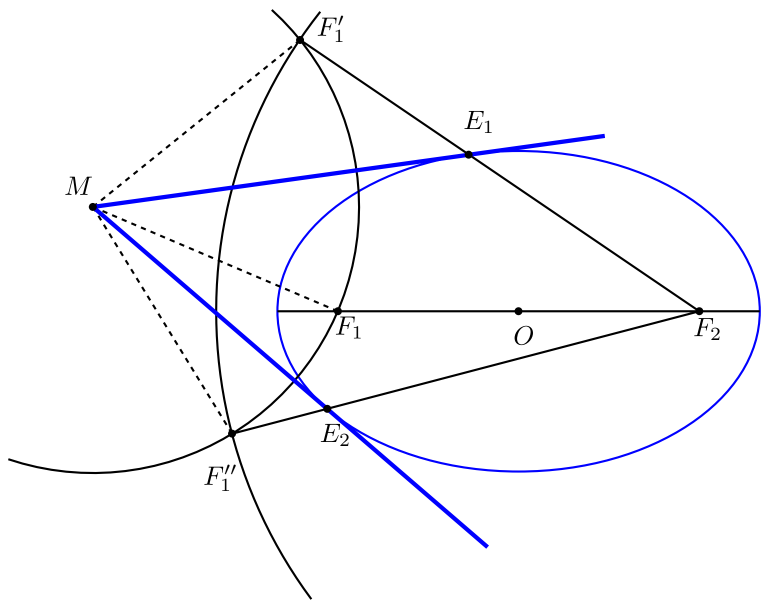
3.6 *Idetartozó feladat lehetne még: a tetszőleges érintő által a ,,csúcsérintőkből” lemetszett szakaszok szorzata konstans.)*

4. Szerkesszünk külső (M) pontból a görbékhez érintőt!

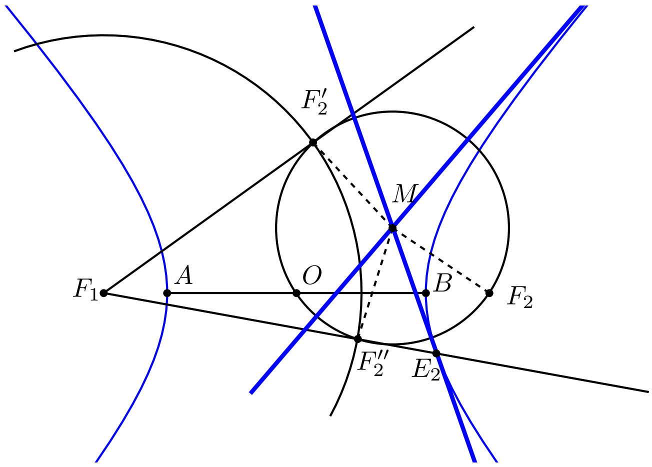
4.1 Az M középpontú, MF_1 (vagy MF) sugarú kör az F_2 középpontú vezérkörből (vagy a vezéregyenesből) kimetszi az F_1 (vagy F) fókusz érintőkre vett tükörképeit.

Ezek után az F_1F_1' és F_1F_1'' (vagy FF' és FF'') szakasz szakaszfelező merőlegeseként szerkeszthető az érintő. Az érintő és a tükörképhez tartozó vezérkör-sugár (vagy a tükörképben a vezéregyenesre állított merőleges) metszéspontja az érintési pont.

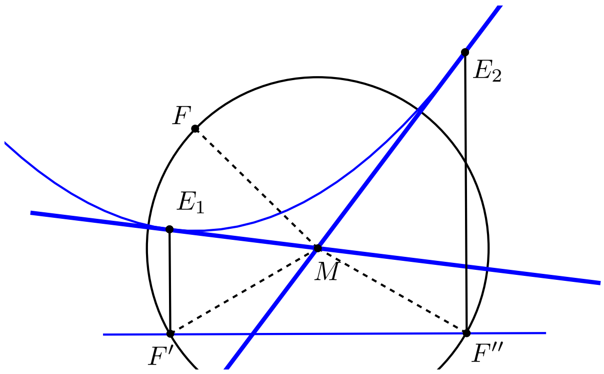
Ellipszisnél:



Hiperbolánál:



Parabolánál:



4.2 *Másként is menne – de ezt a foglalkozáson nem tárgyaltuk: MF Thalész köre a főalakzatból kimetszi az érintők egy-egy pontját.*

4.3 *Feladat lehetne: Külső pontból a kúpszelethez (hiperbolánál: egyik ágához) húzott két érintőszakasz egy fókuszból azonos szög alatt látszik.*

5. A paraboláról:

5.1 A parabola társérintői azok, melyeknél a fókusz (F) illeszkedik az érintési pontok (E_1, E_2) által meghatározott szakaszra.

Feladat: - a társérintők (M) metszéspontja illeszkedik a vezéregyenesre.

- a társérintők merőlegesek egymásra.

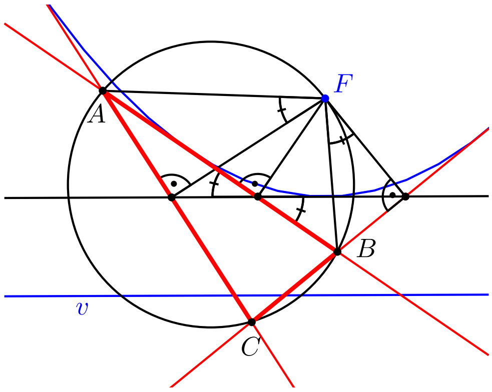
- MF merőleges az E_1E_2 szakaszra.

Az első két tétel megfordítható. Azaz: ha két érintő merőleges, vagy ha két érintő metszéspontja rajta van a vezéregyenesen, akkor társérintők.

(Tehát: azon pontok mértani helye, melyekből a parabola derékszögben látszik, a vezéregyenes.)

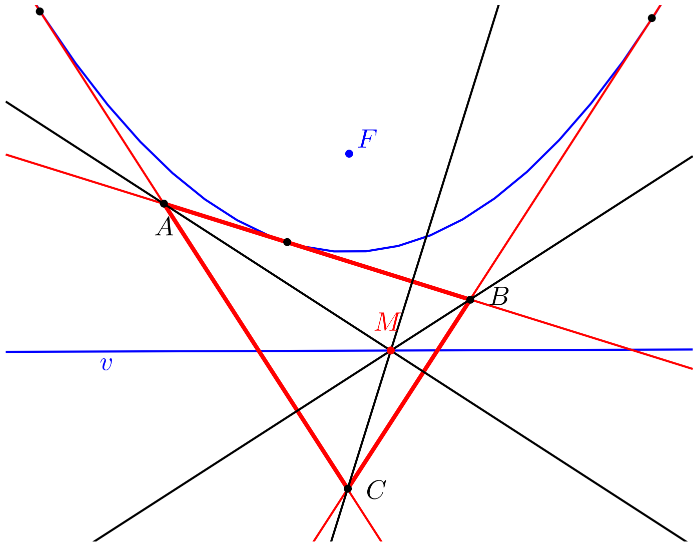
5.2 A parabola három érintője által meghatározott háromszög körülírt köre átmegy a fókuszon.

E tételt egyszerűen húrnégyszögekkel bizonyítottuk, majd röviden kitértünk a háromszög Simson egyenesére és a rá vonatkozó tétel megfordítására.



5.3 E háromszögek magasságpontjainak mértani helye a vezéregyenes.

E tételt nem bizonyítottuk, csak rajzon megmutattam.

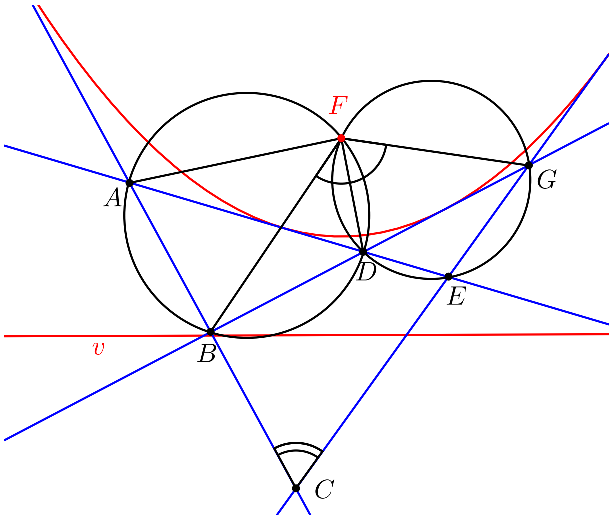


5.4 Szerkesztendő parabola, ha adott négy érintője.

Az egyenesek között nem lehetnek párhuzamosak.

Csak akkor lehet megoldása a feladatnak, ha a négy egyenes által meghatározott négy háromszög körülírt köre egy ponton megy át – ez igaz is. (E –szerintem- közismert tétel húrnégyszögekkel bizonyítható.)

Ezek után: két háromszög körülírt körének (csúcsoktól különböző) közös pontja a parabola fókusza, ennek két egyenesre vonatkozó két tükörképe meghatározza a parabola vezéregyenesét.



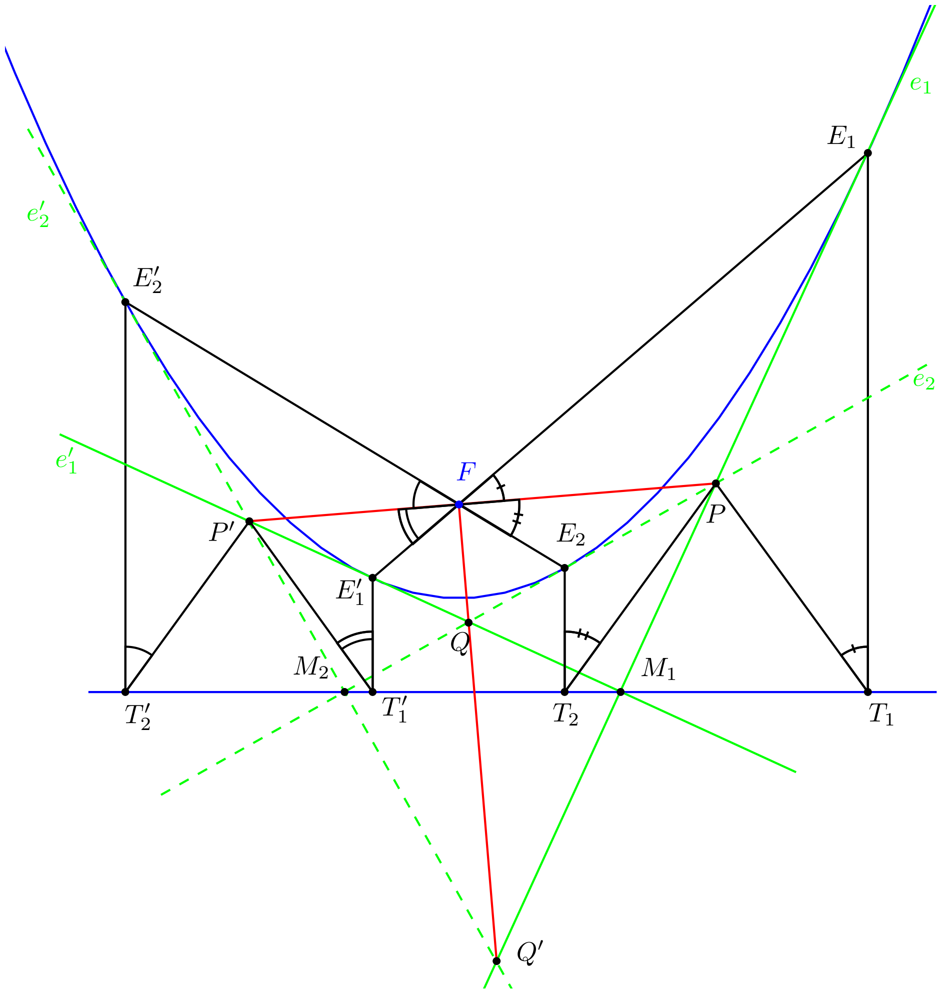
5.5 Egy parabolához P pontból húzott két érintő e_1 és e_2. Társérintőik e_1' és e_2', metszéspontjuk P'. Az e_1 és e_2' metszéspontja Q', e_2 és e_1' metszéspontja Q.

Állítás: PP' és QQ' átmegy F-en, sőt F-ben merőlegesen metszik egymást.

A feladat szintén „csokis" házi feladat maradt. Az előtte elhangzottakból két szép megoldás is következik.

I. megoldás:

$P'F$ az $E_2'FE_1'$ szög, PF pedig az E_1FE_2 szög szögfelezője, de E_2', F, E_2 és E_1, F, E_1' egy egyenesbe esik, így P', F, P is egy egyenesre illeszkedik.



Hasonlóképpen belátható, hogy FQ és FQ' az $E_1'\ FE_2$ szög szögfelezője (tehát F, Q, Q' egy egyenesbe esik), s mint mellékszögek szögfelezői, PP' és QQ' merőlegesek egymásra.

II. megoldás (szerintem ez sokkal szebb):

A parabolához négy érintőt húztunk, de kettő-kettő társérintő (tehát merőlegesek egymásra), így a $P'PQ'$ háromszög magasságpontja Q. Ebből következik, hogy QQ' merőleges PP'-re. Már csak azt kell belátni, hogy a $Q'Q$ magasság talppontja azonos a parabola fókuszával. Bizonyítottuk, hogy a négy érintő által alkotott négy háromszög körülírt köreinek közös pontja a parabola fókusza, de pl. a $Q'M_2P$ és a $Q'PM_1$ háromszögek körülírt körei átmennek a Q'-ből induló magasság talppontján, tehát csak az lehet a fókusz.

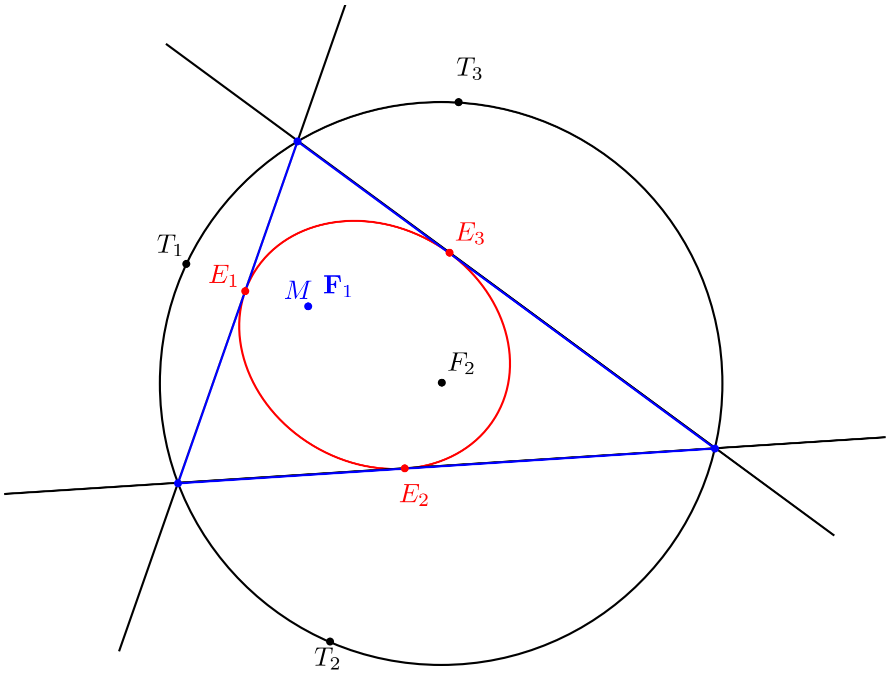
5.6 *Feladat lehetne: Ha az M pontból egy parabolához két érintőt húzunk, úgy MF mértani közepe az FE_1 és FE_2 szakaszoknak.*

6. Egy háromszög érintő kúpszeletei

6.1 Egy hegyesszögű háromszögnek van olyan beírt ellipszise, melynek két fókusza a magasságpont és a körülírt kör középpontja.

A tétel következik abból, hogy a magasságpontnak a három oldal egyenesére vett tükörképe a körülírt körre esik.

Ráadásul ezen ellipszis főköre a háromszög Feuerbach-féle köre.

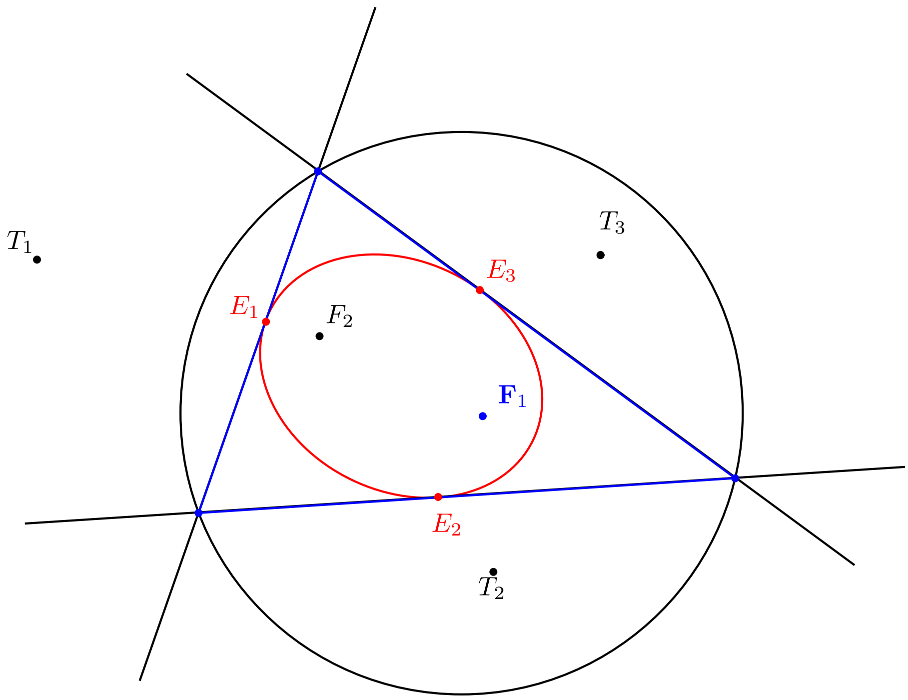


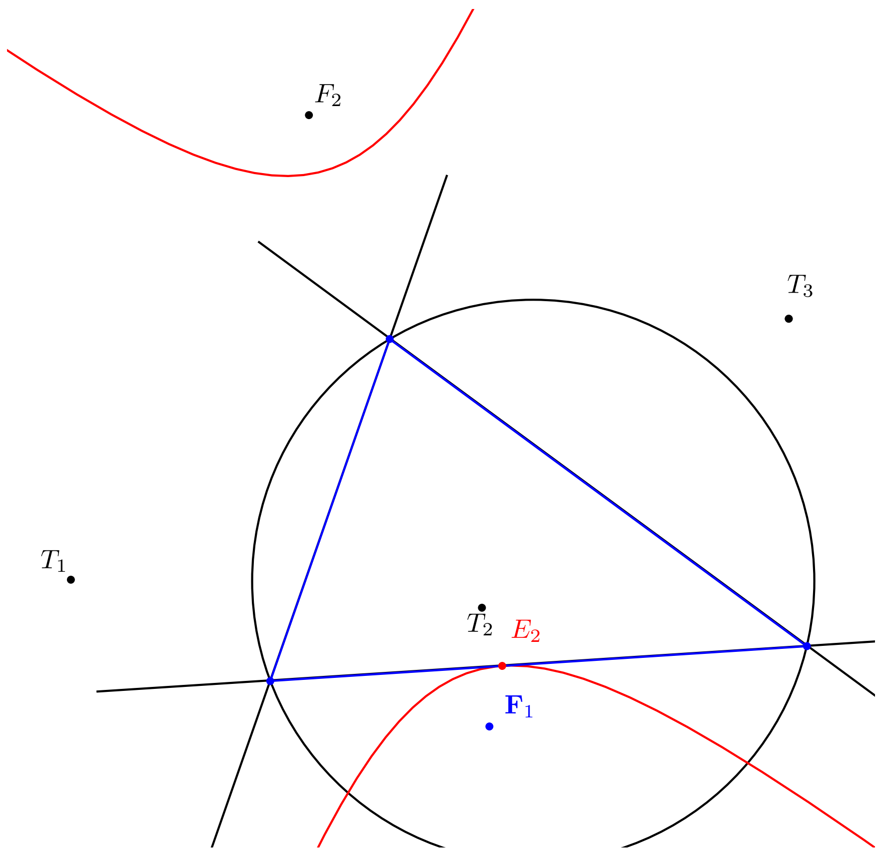
Érdemes meggondolni, hogy tompaszögű háromszög esetében a háromszög oldal-egyeneseit érintő hiperbolát kapunk, melynek fókuszai a háromszög magasságpontja és körülírt körének középpontja.

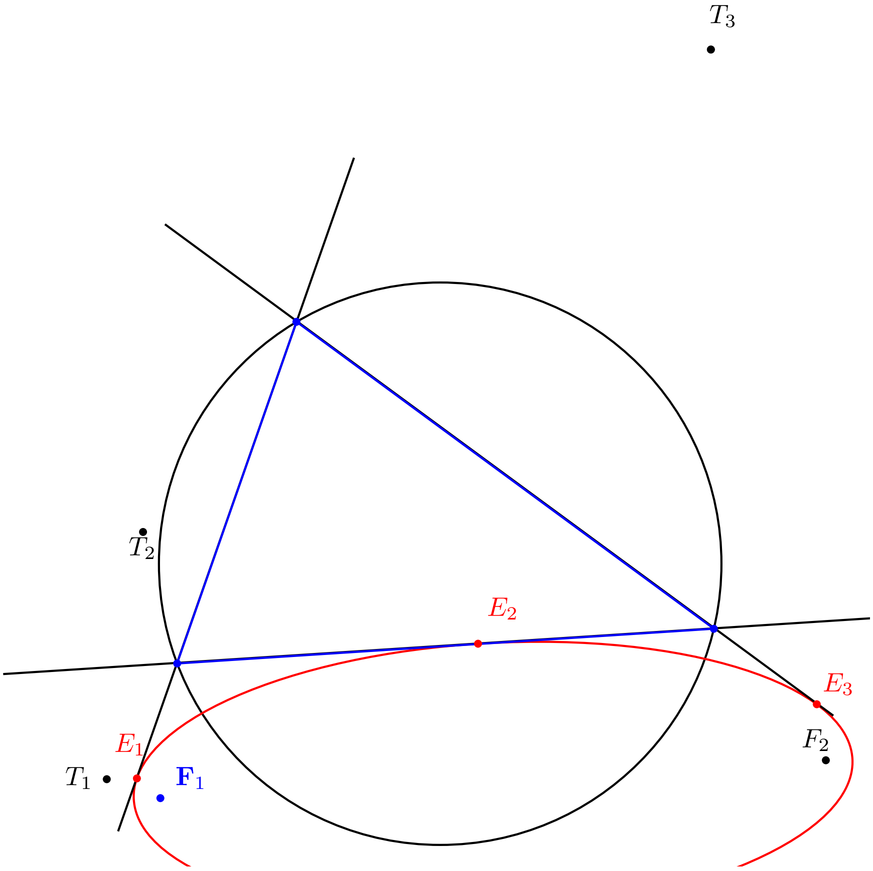
6.2 Ráadásul nézzük meg a rajzon, hogy milyen kúpszelet érinti a hegyesszögű háromszög három oldal-egyenesét, ha a kúpszelet egyik fókusza bejárja a síkot.

Mozgassuk az F_1 fókuszt:

- a háromszögön belül;
- a háromszögön kívül, de a körülírt körön belül;
- a körülírt körön;
- a körülírt körön kívül, különböző szögtartományokban.


T_1
T_3
E_3
E_1
F_2
$\mathbf{F}_1$
E_2
T_2


F_2
T_3
T_1
T_2
E_2
$\mathbf{F}_1$



Van mit bizonyítani.