Áramlások fizikája

Bene Gyula
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A

10. Előadás

10.1. Ismétlés

-

10.2. Súrlódó folyadékok

- **A súrlódási tenzor**
  A kiszemelt folyadékrész határán felületi erők hatnak. Eredőjük felületi integrál. Ezt átírjuk térfogativá (szükséges a mozgásegyenlethez).
  $\int_V \tilde{\mathbf{F}} dV$ adja a felületi erők járulékát.
  $\tilde{\mathbf{F}}$ ezért előáll divergenciaként. Mivel $\tilde{\mathbf{F}}$ vektor:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathrm{div}\, \sigma_i \equiv \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad i = 1, 2, 3$$

  σ_{ik} : feszültségtenzor

$$\int_V \tilde{F}_i dV = \oint_F \sum_k \sigma_{ik} dF_k = \oint_F \sum_k \sigma_{ik} n_k dF$$

  Itt n_k a felületelem normálisának k-adik komponense.

σ jelentése: Az $\mathbf{n}$ irányú (normálisú) egységnyi felületre ható erő $\underline{\underline{\sigma}}\mathbf{n}$.

Ha

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

akkor $\left(\underline{\underline{\sigma}}\mathbf{n}\right)_i = \sigma_{i1}$

σ_{ik} tehát a k irányú (normálisú) egységnyi felületre ható erő i-edik komponense.

Ideális folyadékban ill. hidrosztatikában:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$$

Nincsenek nyírófeszültségek.

Súrlódó folyadékban vannak nyírófeszültségek is. Az előzőtől való eltérés a sebességkülönbségből adódik, s azzal arányos (hacsak nem túl nagy a sebességkülönbség).

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$$

$$\sigma'_{11} \propto \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$\sigma'_{21} = \alpha\frac{\partial v_y}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

A merev forgás nem jelenthet új feszültséget:

Ha $v_x = -\omega y$, $v_y = \omega x$ (forgás az x tengely körül), akkor

$$\sigma'_{21} = \alpha\omega - \beta\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta$$

Ha van térfogatváltozás (nem összenyomhatatlan), akkor div $\mathbf{v}$-vel arányos tag is fellép a diagonális elemekben.

Az általános alak:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + \eta' \mathrm{div}\,\mathbf{v}\delta_{ik}$$

η : dinamikai viszkozitás.
η' helyett más szokásos mennyiség: $\eta' = \xi - \frac{2}{3}\eta$, ahol ξ neve: belső súrlódási együttható.
η és η' minden komponensben ugyanakkora az izotrópia miatt. Folyadékkristályban ez nem lenne igaz.

- **A Navier-Stokes-egyenletek**

$$\int \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int \rho \mathbf{f} dV + \int \tilde{\mathbf{F}} dV \text{ tetszőleges véges } V \text{ térfogatra.}$$

$$\Downarrow$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{f} + \tilde{\mathbf{F}} = \rho\mathbf{f} + \mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}$$

$$\tilde{F}_1 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \eta' \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{div}\,\mathbf{v} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) + \eta\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \triangle v_x + (\eta + \eta')\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\,\mathbf{v}$$

$$\Downarrow$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\mathrm{grad})\mathbf{v} = \rho\mathbf{f} - \mathrm{grad}\, p + \eta \triangle \mathbf{v} + (\eta + \eta')\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{v}$$

Ezek a Navier-Stokes-egyenletek (1822, 1845).
Összenyomhatatlan folyadékban

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\mathrm{grad})\mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, p + \nu \triangle \mathbf{v}$$

Itt $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ a kinematikai viszkozitás.
Mivel

$$\triangle \mathbf{v} = \mathrm{grad\,div}\,\mathbf{v} - \mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{v}\ ,$$

ha a viszkozitásnak szerepe van, az áramlás nem lehet örvénymentes!
Határfeltételek:

Nyugvó fal: $\mathbf{v} = 0$, mozgó fal: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{fal}}$.
Nem csak a normális, hanem a tangenciális komponensre is van feltétel! (A Navier-Stokes-egyenletek másodrendűek, szemben az elsőrendű Euler-egyenlettel.)
Ha a felületre ható erő adott, akkor a felületen $\sum_k \sigma_{ik} n_k$-t kell vele egyenlővé tenni.

- **Lamináris áramlás csőben: a Hagen-Poiseuille-egyenlet**

Hengerkordináták, a z tengely legyen a cső szimmetriatengelye.
A sebességnek csak z komponense van, és csak r-től függ. Ezzel

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

automatikusan teljesül, továbbá

$$\mathbf{v}\text{grad } \mathbf{v} = v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0$$

Mivel az áramlás stacionárius,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$$

A Navier-Sokes-egyenlet ezekután a

$$0 = -\frac{1}{\rho}\text{grad}\, p + \frac{\eta}{\rho} \triangle \mathbf{v} = 0$$

egyenletre egyszerűsödik.
Az egyenlet r komponense:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

Ebből

$$p = p(z)$$

Az egyenlet z komponense:

$$\frac{dp}{dz} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right)$$

A jobboldal csak r függvénye, ezért

$$p = az + b$$

ahol a és b állandók. Ha az L hosszúságú cső végei közt a nyomáskülönbség nagysága Δp, és a nyomás növekvő z-vel csökken, akkor $\Delta p = -aL$, azaz

$$a = -\frac{\Delta p}{L}$$

Ezzel

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{\eta L}$$

r-rel szorzunk:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{\eta L} r$$

Integrálunk:

$$r \frac{dv_z}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta L} r^2 + C$$

Itt C integrációs állandó.
r-rel osztunk:

$$\frac{dv_z}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta L} r + \frac{C}{r}$$

Integrálunk:

$$v_z = -\frac{\Delta p}{4\eta L} r^2 + C \ln r + D$$

Itt D újabb integrációs állandó. Mivel $r = 0$ esetén v_z véges kell, hogy legyen,

$$C = 0\ .$$

A cső falán, $r = R$ esetén $v_z = 0$, ebből

$$D = \frac{\Delta p}{4\eta L} R^2$$

Tehát a sebességprofil

$$v_z = \frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

A másodpercenként átáramló folyadéktérfogat

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^R v_z\, 2\pi r dr = \frac{\pi \Delta p}{2\eta L}\int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi \Delta p}{2\eta L}\left(R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta L}$$

Tehát

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta L}$$

- **Gömbre ható erő lassú lamináris áramlás esetén: a Stokes-képlet**
  Stacionárius áramlást feltételezünk, ezért

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$$

Kis sebességek esetén a sebességben négyzetes tagok elhanyagolhatók a sebességben lineáris tagokhoz képest, ezért

$$(\mathbf{v}\mathrm{grad})\mathbf{v} \approx 0$$

Ezzel a Navier-Stokes-egyenletből

$$\mathrm{grad} p = \eta \triangle \mathbf{v}$$

adódik. A gömbbel együttmozgó koordinátarendszerben a folyadék sebessége a gömb középpontjától távol állandó $\mathbf{u}$, tehát

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}' \ .$$

A végtelenben $\mathbf{v}' = 0$. A folyadék összenyomhatatlan, azaz

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0 \ ,$$

ezért

$$\mathbf{v}' = \mathrm{rot}\mathbf{A} \ .$$

Az $\mathbf{A}$ vektor csak az $\mathbf{u}$ vektortól és az $\mathbf{r}$ helyvektortól függhet (az origó a gömb középpontja). Kis sebességek esetén az $\mathbf{u}$-függés lineáris. Az $\mathbf{A}$ vektor axiálvektor, $\mathbf{u}$ és $\mathbf{r}$ poláris vektorok, ezért szükségképpen

$$\mathbf{A} = \mathrm{grad} f(r) \times \mathbf{u} = \mathrm{rot}(f(r)\mathbf{u}) \ .$$

Így tehát

$$\mathbf{v}' = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(f\mathbf{u}) \ .$$

A Navier-Stokes-egyenlet rotációja jelen esetben:

$$\triangle \mathrm{rot}\mathbf{v}' = 0 \ ,$$

ide a fenti képletet betéve

$$\triangle \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(f\mathbf{u}) = \triangle \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}(f\mathbf{u})) = \triangle \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathrm{rot}(f\mathbf{u}) - \triangle\triangle \mathrm{rot}(f\mathbf{u}) = -\triangle\triangle \mathrm{grad} f \times \mathbf{u} = 0$$

adódik, amiből

$$\mathrm{grad}\triangle\triangle f = 0$$

következik. Ezt integrálva kapjuk:

$$\triangle\triangle f = konstans$$

A konstans nulla, mivel a végtelenben a $\mathbf{v}'$ eltűnik.
A Laplace-operátor gömbkoordinátás alakját használva kapjuk:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr}\triangle f = 0$$

r^2-tel szorozva és integrálva:

$$r^2\frac{d}{dr}\triangle f = a$$

r^2-tel osztva és integrálva:

$$\triangle f = -\frac{a}{r} + b$$

Mivel a végtelenben a $\mathbf{v}'$ (ami f második deriváltjaival fejezhető ki) eltűnik, $b = 0$. Marad tehát

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr}f = -\frac{a}{r}\ .$$

r^2-tel szorozva és integrálva:

$$r^2\frac{d}{dr}f = -a\frac{r^2}{2} + c$$

r^2-tel osztva és integrálva:

$$f = -\frac{a}{2}r - \frac{c}{r} + d$$

Itt a, c, d integrációs állandók.
Ezzel

$$\mathbf{A} = \mathrm{grad} f(r) \times \mathbf{u} = \left(-\frac{a}{2r} + \frac{c}{r^3}\right)\mathbf{r}\times\mathbf{u}$$

és

$$\begin{aligned} v_i' &= (\mathrm{rot}\mathbf{A})_i = \epsilon_{ijk}\partial_j\epsilon_{klm}\left(-\frac{a}{2r} + \frac{c}{r^3}\right)r_l u_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\left[\left(\frac{a}{2r^3} - 3\frac{c}{r^5}\right)r_j r_l u_m + \left(-\frac{a}{2r} + \frac{c}{r^3}\right)\delta_{jl}u_m\right] \\ &= \left(\frac{a}{2r^3} - 3\frac{c}{r^5}\right)((\mathbf{ru})r_i - r^2 u_i) - 2\left(-\frac{a}{2r} + \frac{c}{r^3}\right)u_i = \left(\frac{a}{2r} + \frac{c}{r^3}\right)u_i + \left(\frac{a}{2r} - 3\frac{c}{r^3}\right)(\mathbf{un})n_i \end{aligned}$$

Itt $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ a radiális egységvektor. Ezzel tehát a sebességtér

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \left(\frac{a}{2r} + \frac{c}{r^3}\right)\mathbf{u} + \left(\frac{a}{2r} - 3\frac{c}{r^3}\right)(\mathbf{un})\mathbf{n}$$

A gömb felületén, azaz $r = R$ esetén $\mathbf{v} = 0$, ami azt jelenti, hogy ekkor mind $\mathbf{u}$, mind $\mathbf{n}$ együtthatójának el kell tűnnie, tehát

$$1 + \frac{a}{2R} + \frac{c}{R^3} = 0$$

és

$$\frac{a}{2R} - 3\frac{c}{R^3} = 0$$

Ennek megoldása

$$a = -\frac{3}{2}R$$

$$c = -\frac{1}{4}R^3$$

Ezt visszahelyettesítve a sebességtérbe:

$$\mathbf{v} = \left(1 - \frac{3}{4}\frac{R}{r} - \frac{1}{4}\frac{R^3}{r^3}\right)\mathbf{u} + \left(-\frac{3}{4}\frac{R}{r} + \frac{3}{4}\frac{R^3}{r^3}\right)(\mathbf{un})\mathbf{n} = \mathbf{u} - \frac{3}{4}\frac{R\left(\mathbf{u} + (\mathbf{un})\mathbf{n}\right)}{r} - \frac{1}{4}\frac{R^3\left(\mathbf{u} - 3(\mathbf{un})\mathbf{n}\right)}{r^3}$$

A $\mathbf{v}'$ sebességet felírhatjuk

$$\mathbf{v}' = \nabla \times (\nabla f \times \mathbf{u}) = (\mathbf{u}\nabla)\nabla f - \mathbf{u}\triangle f$$

alakban.
A nyomásra vonatkozóan így

$$\nabla p = \eta\triangle(\mathbf{u}\nabla)\nabla f - \eta\mathbf{u}\triangle\triangle f = \nabla\left(\eta(\mathbf{u}\nabla)\triangle f\right)$$

adódik, mivel, mint láttuk, $\triangle\triangle f = 0$.
Ezt integrálva:

$$p = p_0 + \eta(\mathbf{u}\nabla)\triangle f = p_0 + \eta(\mathbf{u}\nabla)\left(-\frac{a}{r}\right) = p_0 - \frac{3\eta R(\mathbf{un})}{2r^2}$$

Speciálisan a gömb felszínén

$$p = p_0 - \frac{3\eta u}{2R}\cos\Theta\ ,$$

feltéve, hogy a polártengely $\mathbf{u}$ irányába mutat.
A gömbre ható erő z irányú, nagysága:

$$F_z = \oint -p\cos\Theta\ df + \oint \left(\sigma'_{rr}\cos\Theta - \sigma'_{\Theta r}\sin\Theta\right)\ df$$

Itt a felületelem $df = R^2\sin\Theta d\Theta d\varphi$, a feszültségtenzor belső súrlódásból eredő részének megfelelő komponensei pedig

$$\begin{aligned}
\sigma'_{rr} &= \mathbf{e}_r \cdot \sigma' \cdot \mathbf{e}_r = 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r} \\
\sigma'_{\Theta r} &= \mathbf{e}_\Theta \cdot \sigma' \cdot \mathbf{e}_r = \eta\mathbf{e}_\Theta \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} + \eta\mathbf{e}_r \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \Theta} \\
&= \eta\mathbf{e}_\Theta \cdot \frac{\partial\left(v_r\mathbf{e}_r + v_\Theta\mathbf{e}_\Theta + v_\varphi\mathbf{e}_\varphi\right)}{\partial r} + \eta\mathbf{e}_r \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial\left(v_r\mathbf{e}_r + v_\Theta\mathbf{e}_\Theta + v_\varphi\mathbf{e}_\varphi\right)}{\partial\Theta} \\
&= \eta\left(\frac{\partial v_\Theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\Theta} - \frac{v_\Theta}{r}\right)
\end{aligned}$$

A fent szereplő sebességkomponensek

$$\begin{aligned}
v_r &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = \left(1 - \frac{3}{2}\frac{R}{r} + \frac{1}{2}\frac{R^3}{r^3}\right)u\cos\Theta \\
v_\Theta &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_\Theta = -\left(1 - \frac{3}{4}\frac{R}{r} - \frac{1}{4}\frac{R^3}{r^3}\right)u\sin\Theta
\end{aligned}$$

Így a feszültségtenzor komponensei a gömb felszínén:

$$\sigma'_{rr} = 0$$

$$\sigma'_{\Theta r} = -\frac{3\eta u}{2R}\sin\Theta$$

Ezzel az erő:

$$F_z = \frac{3\eta u}{2R}\oint df = 6\pi\eta R u\ ,$$

vagy vektoriálisan

$$\mathbf{F} = 6\pi\eta R\mathbf{u}$$

- **A Navier-Stokes-egyenlet dimenziótlanítása és a Reynolds-szám**

$$\mathbf{r} = L\tilde{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{v} = U\tilde{\mathbf{v}}$$

$$t = \frac{L}{U}\tilde{t}$$

$$p = \rho U^2\tilde{p}$$

A dimenziótlan változókkal a Navier-Stokes-egyenlet (ha a térfogati erő nulla):

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial\tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}}\,\tilde{\mathrm{grad}})\tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{\mathrm{grad}}\,\tilde{p} + \frac{\nu}{UL}\tilde{\triangle}\tilde{\mathbf{v}}$$

Reynolds-szám:

$$\mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu}$$

- **Oseen-egyenlet**
  A Stokes-féle megoldás még kis Reynolds-számok esetén sem érvényes mindenütt.

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \frac{3}{4}\frac{R\,(\mathbf{u} + (\mathbf{un})\mathbf{n})}{r} - \frac{1}{4}\frac{R^3\,(\mathbf{u} - 3(\mathbf{un})\mathbf{n})}{r^3}$$

A Navier-Stokes-egyenlet elhanyagolt tagja

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} \propto \frac{R\,u^2}{r^2}\ ,$$

míg a megtartott tagok nagyságrendje

$$\nu\triangle\mathbf{v} \propto \nu\frac{R\,u}{r^3}\ .$$

Ha tehát

$$r > \frac{\nu}{u}\ ,$$

az elhanyagolt tag nagyobb, mint a megtartott. Ha az $\mathrm{Re} = \frac{u\,R}{\nu}$ Reynolds-szám 1-nél jóval kisebb,

$$\frac{\nu}{u} = \frac{R}{\mathrm{Re}} \gg R\ ,$$

így csak a gömbtől nagy távolságban ($r \gg R$) szükséges a $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$ tag figyelembevétele. Ott azonban $\mathbf{v} \approx \mathbf{u}$, ezért az egyenlet (stacionárius esetben)

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\triangle\mathbf{v}$$

Ez az Oseen-egyenlet. Közelítő megoldása gömb esetében:
Áramlási függvény (jelen esetben $v_r = \frac{1}{r^2\sin\Theta}\frac{\partial\psi}{\partial\Theta}\ ,\quad v_\Theta = -\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}$):

$$\psi = \frac{1}{2}u\,r^2\sin^2\Theta + u\,R^2\left(\frac{1}{4}\frac{R}{r}\sin^2\Theta - \frac{3}{2}\,(1-\cos\Theta)\,\frac{1-\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(1+\cos\Theta)\,\frac{r}{R}\right)}{\mathrm{Re}}\right)$$

Összehasonlításként a Stokes-féle megoldás áramlási függvénye:

$$\psi = \frac{1}{2} u\, r^2 \sin^2 \Theta + u\, R^2 \left(\frac{1}{4} \frac{R}{r} \sin^2 \Theta - \frac{3}{4} \frac{r}{R} \sin^2 \Theta \right)$$

Next Up Previous

Gyula Bene 2008-02-14