

[Next](#) [Up](#) [Previous](#)

Áramlások fizikája

Bene Gyula

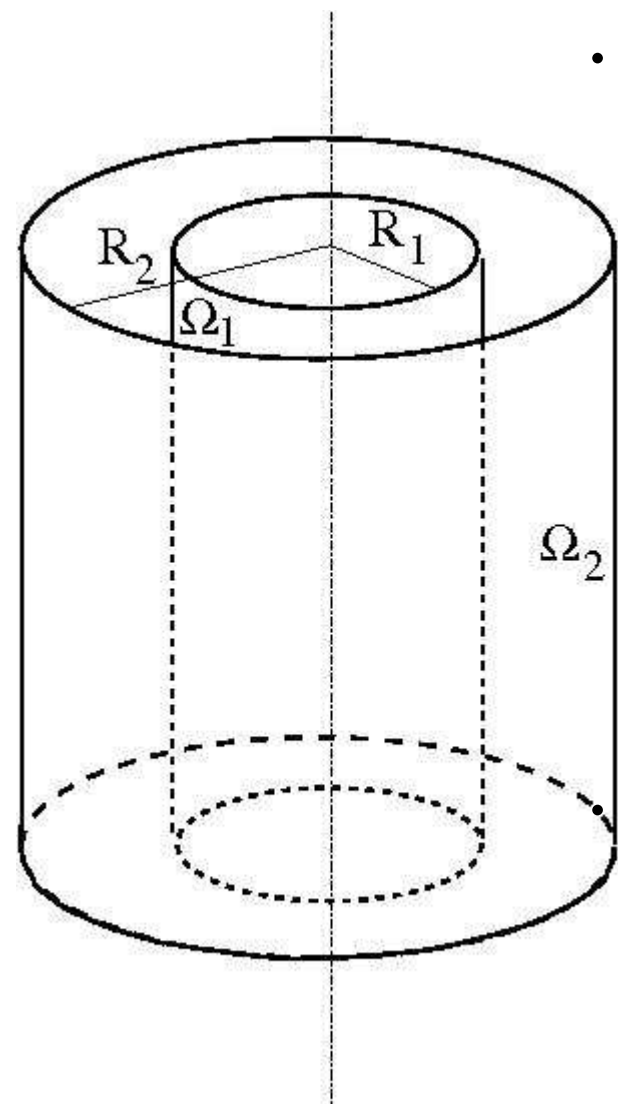
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A

11. Előadás

11.1. Ismétlés

-

11.2. Áramlás koncentrikus, forgó hengerek közt (Couette-Taylor-áramlás). Egzakt megoldás és stabilitásvizsgálat



- A Navier-Stokes-egyenletek hengerkoordinátákban:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_r}{r^2} \right) \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= \\ &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} &= 0 \end{aligned}$$

Feltevés:

$$v_r = v_z = 0, \quad v_\varphi = v_\varphi(r), \quad p = p(r)$$

Ekkor a két utolsó egyenlet azonosan teljesül. A megmaradt két egyenletből:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \rho \frac{v_\varphi^2}{r} \\ \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} &= 0 \end{aligned}$$

- Keressük a megoldás hatványfüggvényként!

$$v_\varphi = a r^n$$

A második egyenletből

$$n(n-1) a r^{n-2} + n a r^{n-2} - a r^{n-2} = 0,$$

azaz

$$n^2 - 1 = 0$$

Tehát $n = \pm 1$, így az általános megoldás

$$v_\varphi = a r + \frac{b}{r}$$

Mivel $v_\varphi(R_1) = R_1 \Omega_1$ és $v_\varphi(R_2) = R_2 \Omega_2$ a határfeltételek,

$$v_\varphi = \frac{R_2^2 \Omega_2 - R_1^2 \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} r - \frac{R_2^2 R_1^2 (\Omega_2 - \Omega_1)}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}$$

a határfeltételeket teljesítő egzakt megoldás.

- Stabilitásvizsgálat nagy Reynolds-számok esetén:

Ekkor a nyíróerők a folyadék belsejében elhanyagolhatók, így az impulzusmomentum megmarad.

J_0 impulzusmomentumú m tömegű folyadékelemet a tengelytől r_0 távolságban

$$F_0 = \frac{J_0^2}{m r_0^3}$$

centripetális erő tart körpályán. Ha a folyadékelem elmozdul egyensúlyi helyzetéből és a tengelytől $r > r_0$ távolságra kerül, ott

$$F = \frac{J^2}{m r^3}$$

centripetális erő hat rá, viszont

$$F'_0 = \frac{J_0^2}{mr^3}$$

erő tartaná egyensúlyban. Az eredeti egyensúlyi helyzetbe nyilván akkor tér vissza, ha

$$F > F'_0, \quad \text{azaz } J^2 > J_0^2$$

Másképp kifejezve

$$J \frac{dJ}{dr} > 0$$

az egyensúly feltétele.

A fenti egzakt megoldást behelyettesítve az egyensúly feltétele tehát

$$(R_2^2 \Omega_2 - R_1^2 \Omega_1) \dot{\varphi} > 0$$

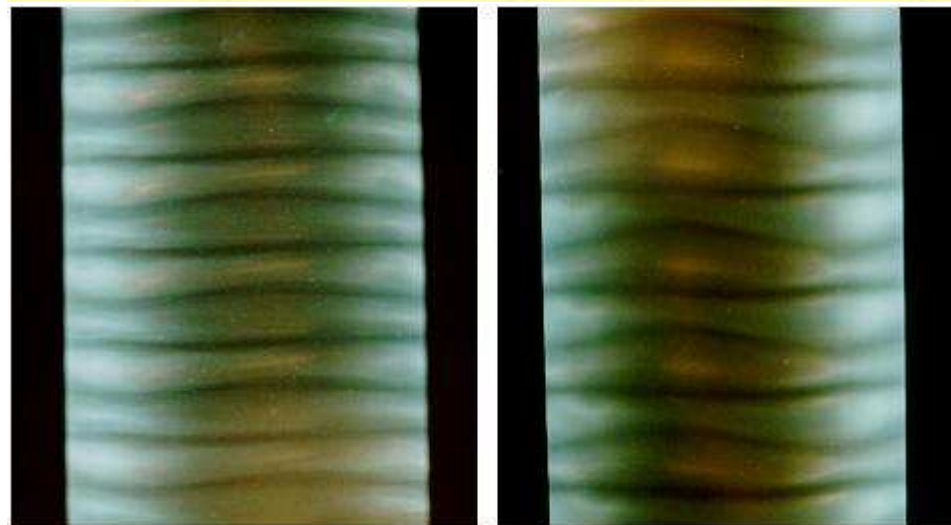
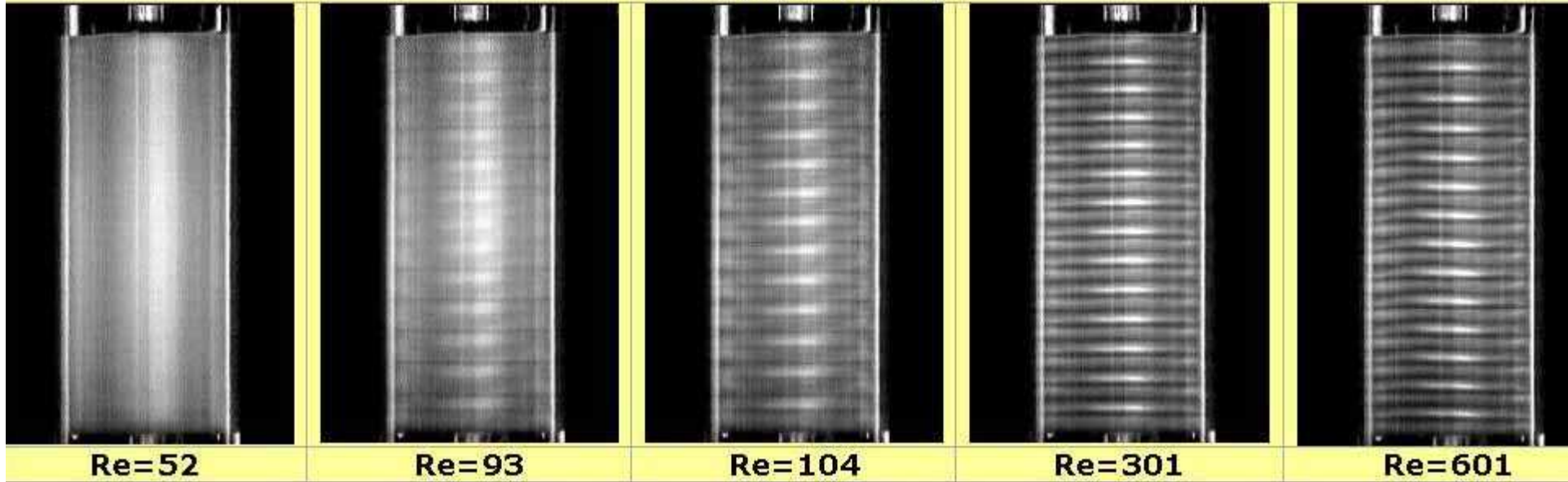
ahol

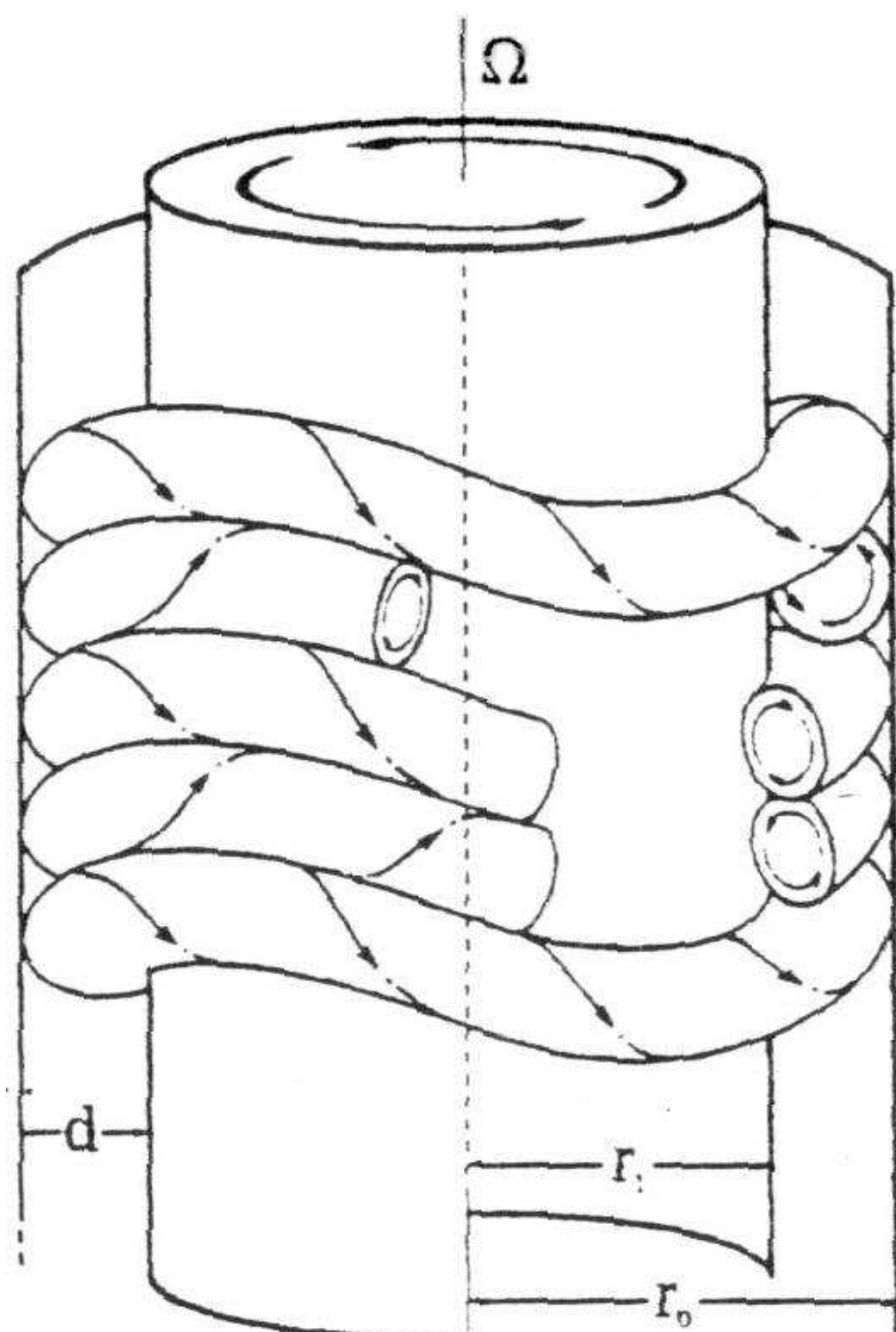
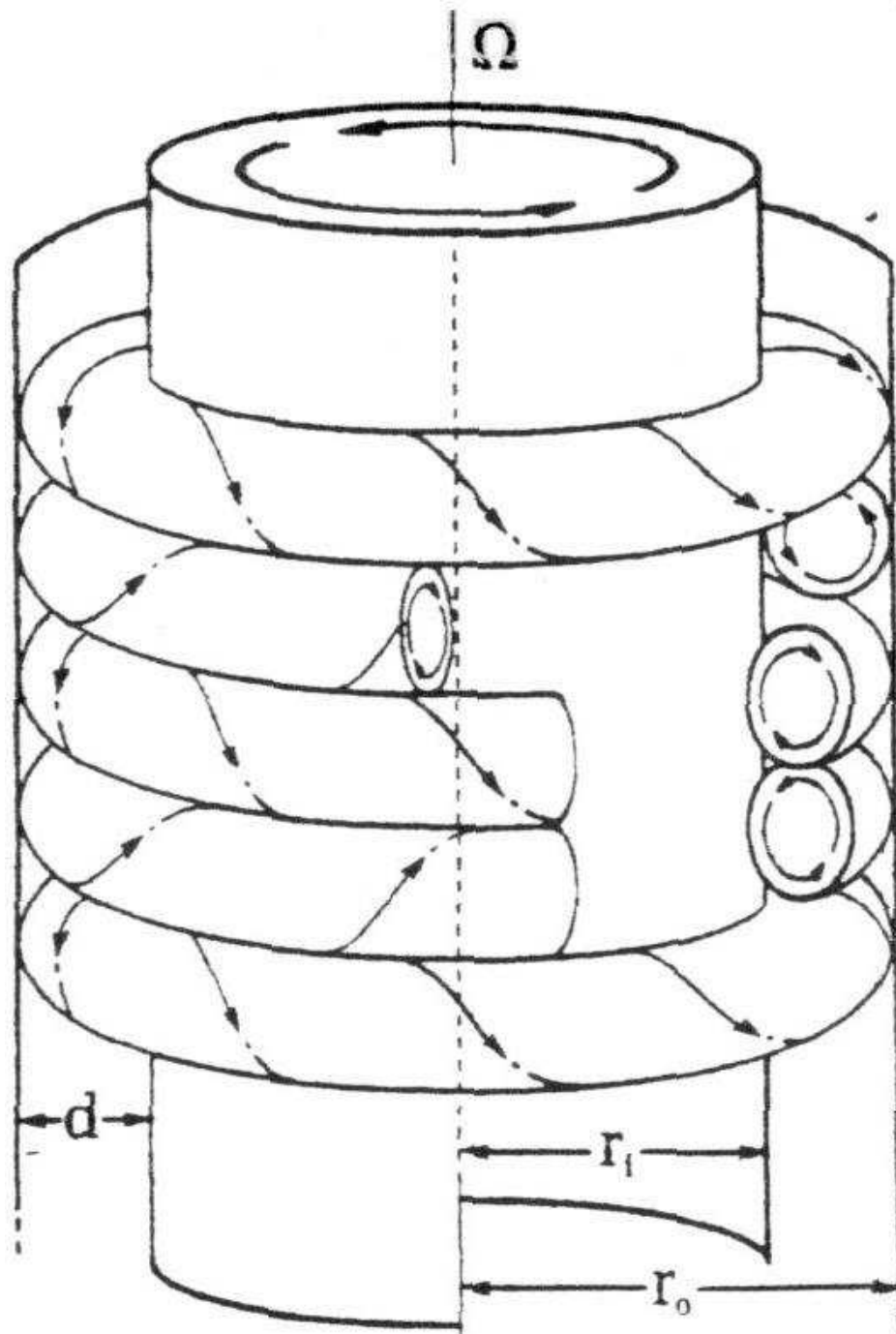
$$\dot{\varphi} = \frac{v_\varphi}{r} = \frac{R_2^2 \Omega_2 - R_1^2 \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{R_2^2 R_1^2 (\Omega_2 - \Omega_1)}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2}$$

r függvényében monoton változik Ω_1 -től Ω_2 -ig.

- [Kis Reynolds-számok esetén az áramlás mindig stabil](#)
- Áramlási kép nagyobb Reynolds-számok esetén:

Radius Ratio=0.80



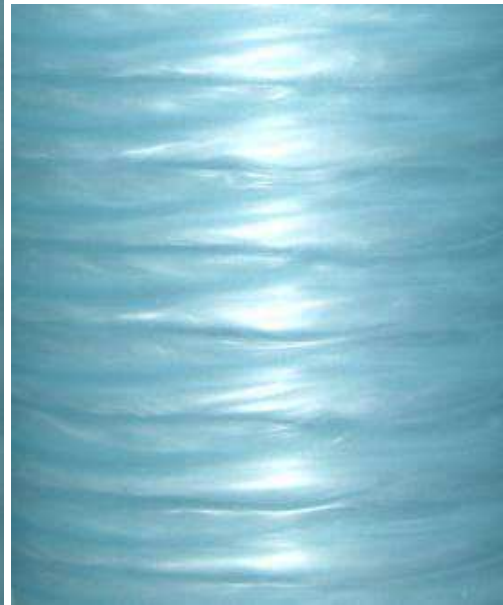




Re=177



Re=506



Re=3027



Re=8072

11.3. Stabilitásvizsgálat általában. A turbulencia kialakulása.

- Lineáris stabilitásvizsgálat.

Legyen \mathbf{v}_0 és p_0 a Navier-Stokes-egyenletek adott határfeltételt teljesítő egzakt megoldása. Adjunk ehhez kis perturbációt:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1, \quad p = p_0 + p_1$$

A kis perturbációs tagok szerint lineáris rendben kapjuk:

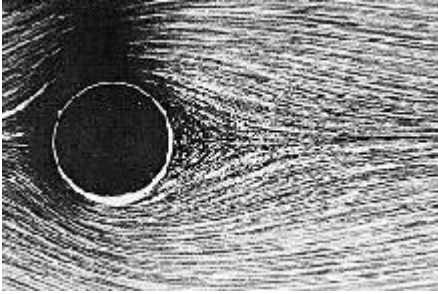
$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 = -\frac{\nabla p_1}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}_1$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0$$

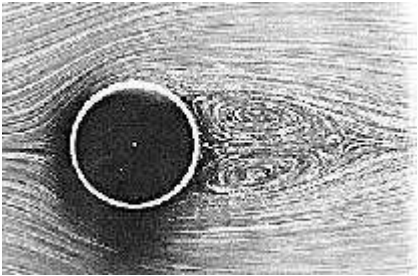
A határfeltételek ugyanazok \mathbf{v}_1 -re, mint \mathbf{v}_0 -ra.

- Ha az alapmegoldás stacionárius, akkor $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ alakú megoldások léteznek. A stabilitás feltétele, hogy ω képzetes része semelyik módusra ne legyen negatív. Instabilitás esetén a perturbáció növekszik, a nemlineáris tagok pedig stabilizálják az eredetileg instabil módust, periodikus mozgás alakul ki.
- Ha az alapmegoldás periodikus, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)e^{i\omega t}$, ahol $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ az alapmegoldás körfrekvenciájával periodikus. Az alapmegoldás körfrekvenciája és ω aránya általában irracionális (kváziperiodikusság). Instabilitás esetén a perturbáció növekszik, a nemlineáris tagok pedig stabilizálják az eredetileg instabil módust, kváziperiodikus mozgás alakul ki.
- Ha az alapmegoldás kváziperiodikus, \mathbf{v}_1 -ben ismét újabb frekvencia jelenik meg, a megoldás azonban instabilitás esetén a perturbáció növekedtével nem stabilizálódik, hanem tipikusan *kaotikussá* válik.
- Nagy Reynolds-számok esetén a mozgás jellegzetes kavargó, aperiodikus, véletlenszerű: turbulens. A turbulencia kvantitatív elmélete nincs kidolgozva.

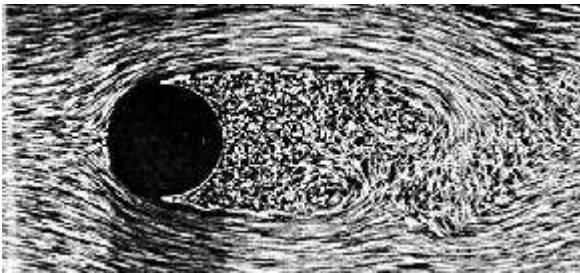
- Henger körüli áramlás:



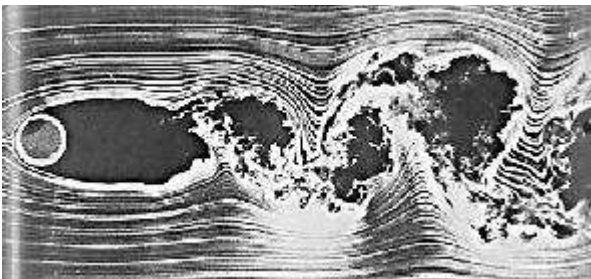
$Re=9.6$

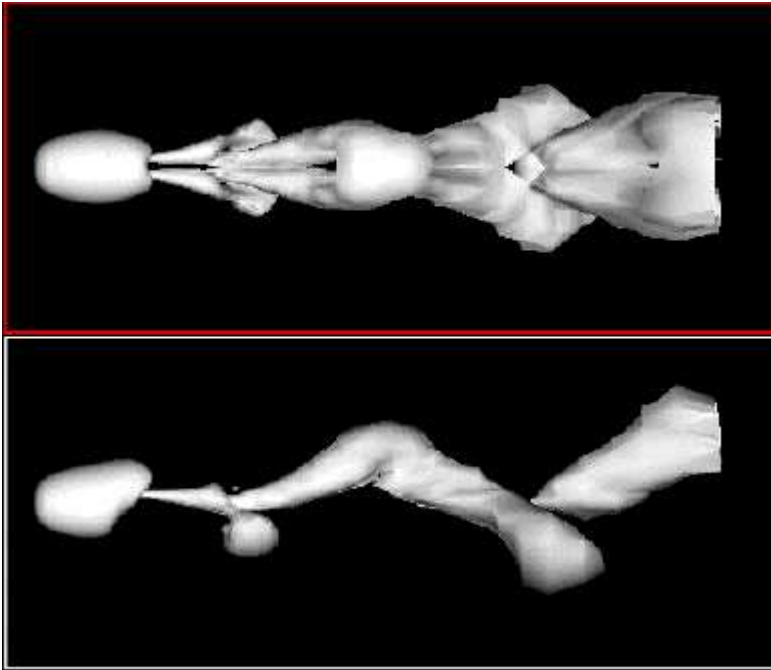


$Re=26$

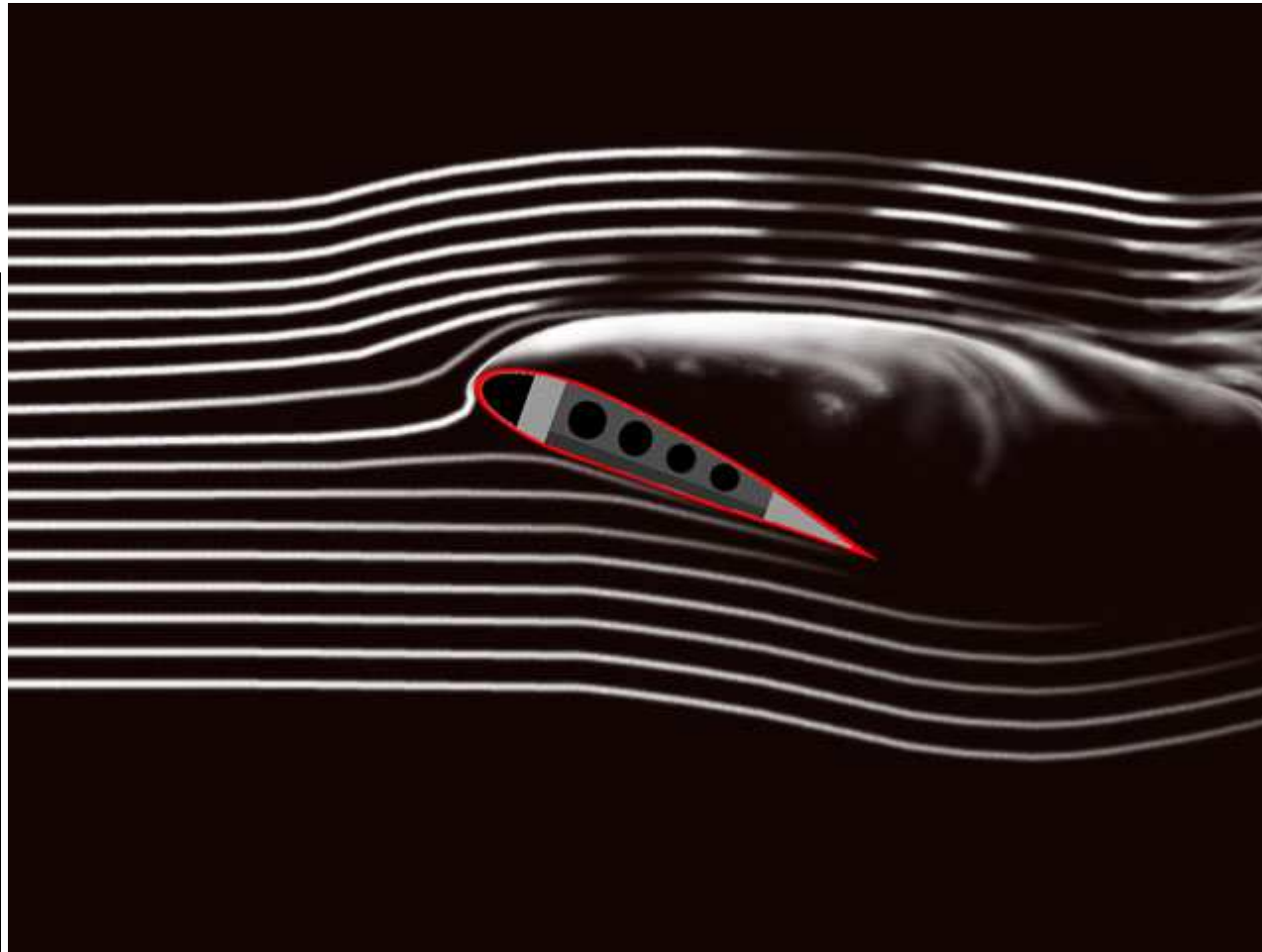


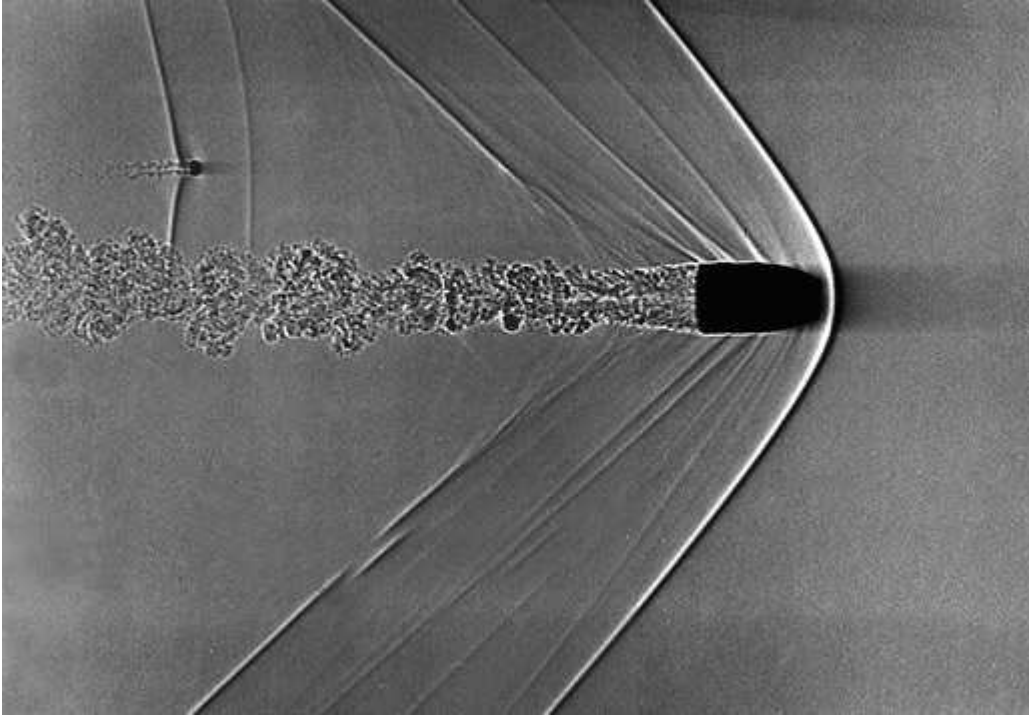
$Re=2000$



$Re=10000$ Örvények leválása gömből, szimuláció, $Re=300$

- Lamináris vs. turbulens áramlás





11.4. A kifejlett turbulencia. Hasonlósági megfontolások. Lokális turbulencia.

Tömegesre eső energiadisszipáció időegység alatt: ϵ
Legnagyobb hosszskála: l

$$v_\lambda \approx (\epsilon \lambda)^{1/3}$$

Viszkózus hosszskála:

$$\lambda_0 \approx \frac{l}{\text{Re}^{3/4}} \approx \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}$$

11.5. Lamináris árnyékszóna.

Áramlásba helyezett test mögött

$$\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{v}' .$$

A testre ható erő:

$$\mathbf{F} = -\rho U \int_{\text{a test mögött az árnyékszóna keresztmetszetére}} \mathbf{v}' dy dz \quad (\mathbf{U} \text{ x irányú})$$

Az árnyékszónán belül a Navier-Stokes-egyenlet $\Delta \mathbf{v}$ tagja dominál, azon kívül viszont $(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$. Az árnyékszóna határa a két tag egyenlőségéből becsülhető:

$$U \frac{u}{x} \approx \nu \frac{u}{y^2}$$

azaz

$$y \approx \left(\frac{\nu x}{U} \right)^{1/2} .$$

Másrészt

$$F_x \approx \rho U u y^2 ,$$

amiből

$$u \approx \frac{F_x}{\rho \nu x}$$

a sebesség megváltozása az árnyékszónán belül.

11.6. Turbulens árnyékszóna.

Ezúttal is

$$F_x \approx \rho U u y^2 ,$$

de most

$$\frac{y}{x} = \frac{u}{U}$$

közelítés használható az árnyékvona határaitra, ugyanis $v_y \approx u$, $v_x \approx U$, a viszkozitás pedig nem játszik szerepet. Ezzel

$$y \approx \left(\frac{F_x x}{\rho U^2} \right)^{1/3} , \quad u \approx \left(\frac{F_x U}{\rho x^2} \right)^{1/3}$$

$$\text{Re} = \frac{u y}{\nu} \approx \frac{1}{\nu} \left(\frac{F_x^2}{\rho^2 U x} \right)^{1/3}$$

A Reynolds-szám a testtől mért távolsággal csökken \Rightarrow az árnyékvona elég távol laminárisává válik.

11.7. Lamináris határréteg. Leszakadási jelenség.

- Prandtl-féle határréteg-egyenletek:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx} , \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Dimenziótlanítás:

$$x = lx' , \quad y = \frac{ly'}{\sqrt{\text{Re}}} , \quad v_x = U_0 v'_x , \quad v'_y = \frac{U_0 v'_y}{\sqrt{\text{Re}}} , \quad \text{ahol } \text{Re} = \frac{U_0 l}{\nu}$$

$$v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} - \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} = U' \frac{dU'}{dx'} , \quad \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} = 0$$

- Leszakadás feltétele:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

11.8. Logaritmikus sebességprofil. Turbulens áramlás csövekben.

- Síkfelülettel párhuzamos átlagsebességű turbulens áramlást vizsgálunk. A felületegységre ható súrlódási erő: σ
Karakterisztikus sebesség:

$$v^* = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

- Viszkózus alhéj:

$$y_0 \approx \frac{\nu}{v^*}, \quad u = \frac{\sigma}{\rho\nu} y$$

- Logaritmikus sebességprofil:
Dimenzióanalízis okokból

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{b} \frac{v^*}{y} \quad (b \text{ dimenzióatlan állandó}),$$

így ($u(y_0) = v^*$ határfeltétellel)

$$u = \frac{v^*}{b} \ln \frac{yv^*}{\nu}, \quad \text{pontosabban: } u = v^* \left(2.4 \ln \frac{yv^*}{\nu} + 5.84 \right)$$

- Turbulens áramlás csövekben:
A logaritmikus sebességprofil felhasználásával $y = a$ esetén (a a cső sugara), és mert most $\sigma 2\pi a l = \Delta p \pi a^2$:

$$U = \sqrt{\frac{a\Delta p}{2b^2\rho l}} \ln \left(\frac{a}{\nu} \sqrt{\frac{a\Delta p}{2\rho l}} \right)$$

- Csőellenállási együttható:

$$\lambda = \frac{\frac{\Delta p}{l} 2a}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

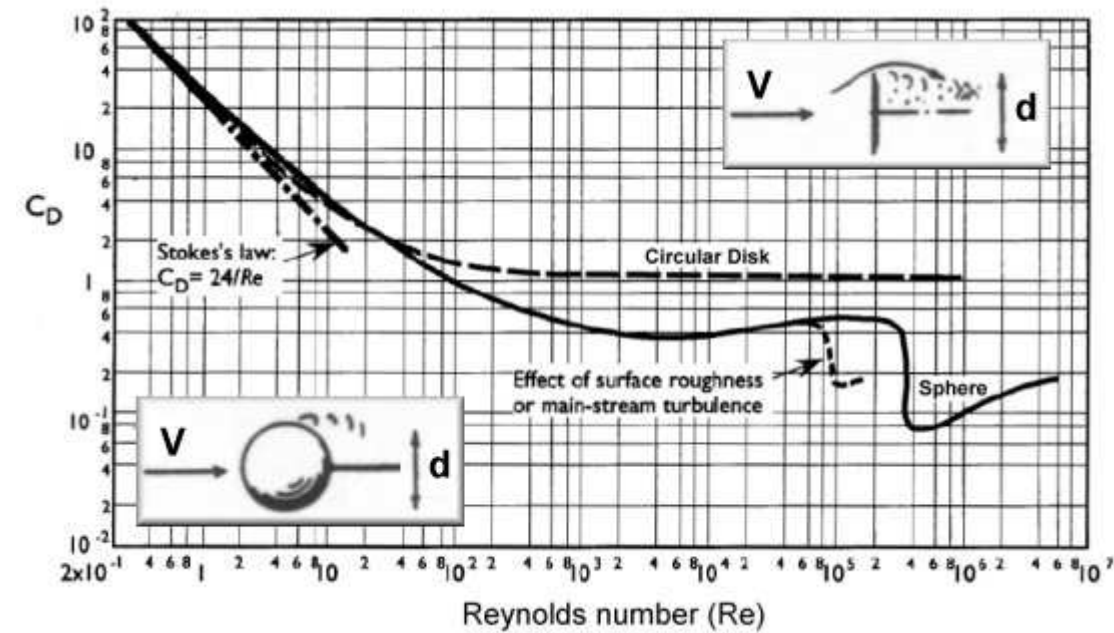
Lamináris áramlás esetén:

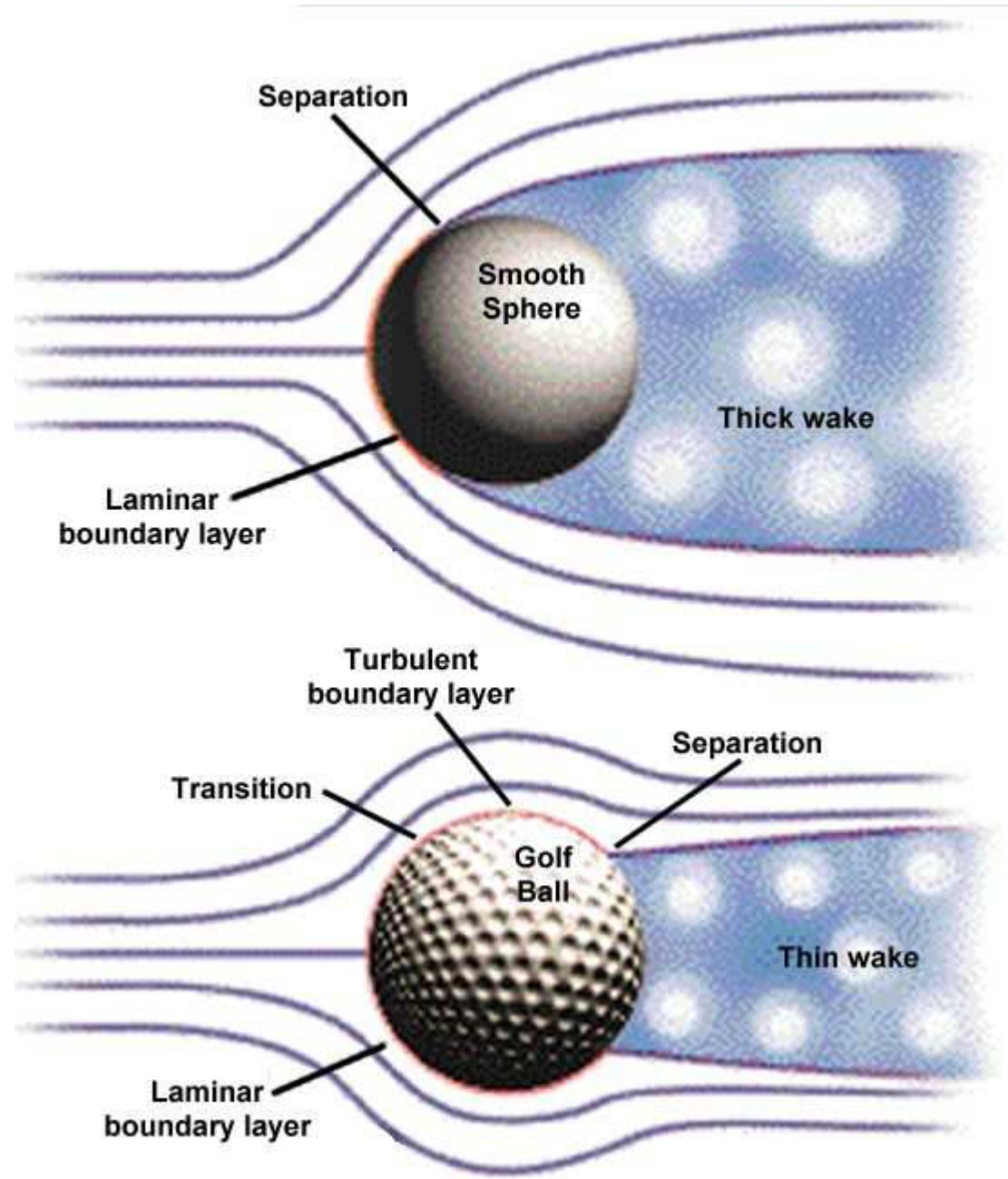
$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

Turbulens áramlás esetén (a logaritmikus sebességprofil pontosabb empirikus változatával):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0.85 \ln(Re\sqrt{\lambda}) - 0.55$$

11.9. Turbulens határréteg. Ellenállási válság.

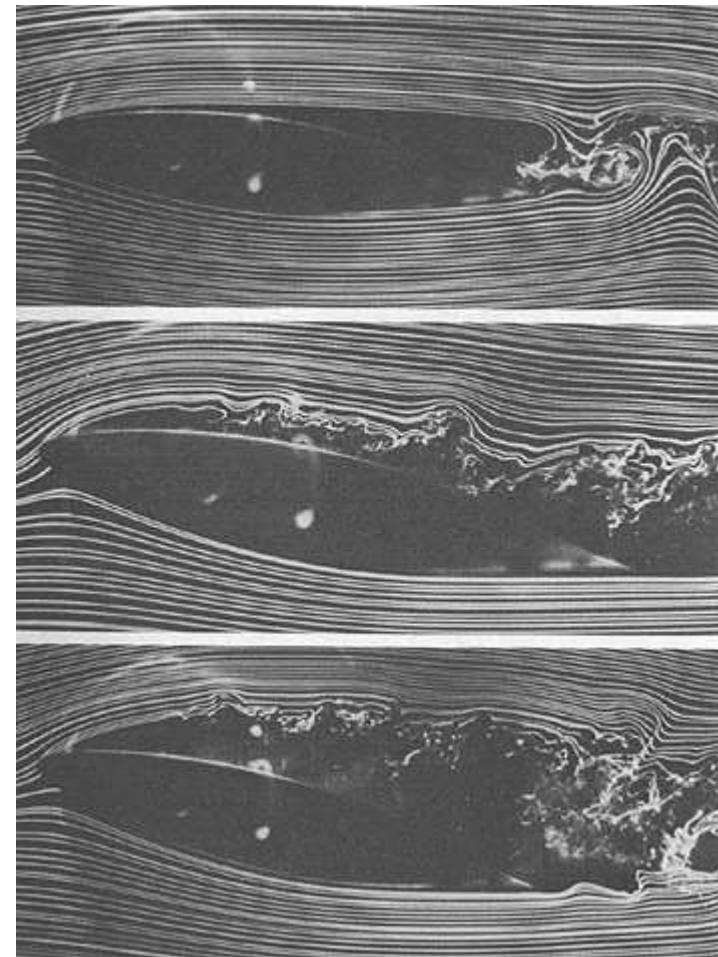


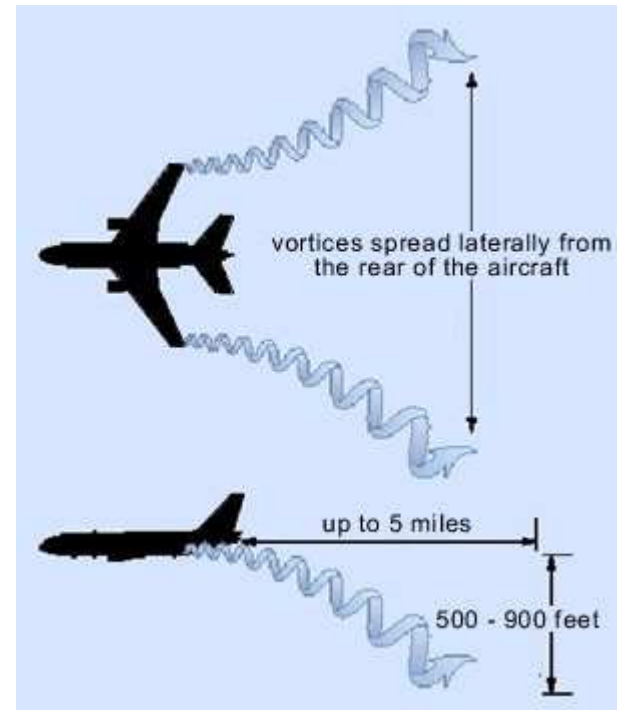




11.10. Szárnyakra ható felhajtóerő.

[Áramvonalas szárny](#)





[Next](#) [Up](#) [Previous](#)

Gyula Bene 2008-02-14