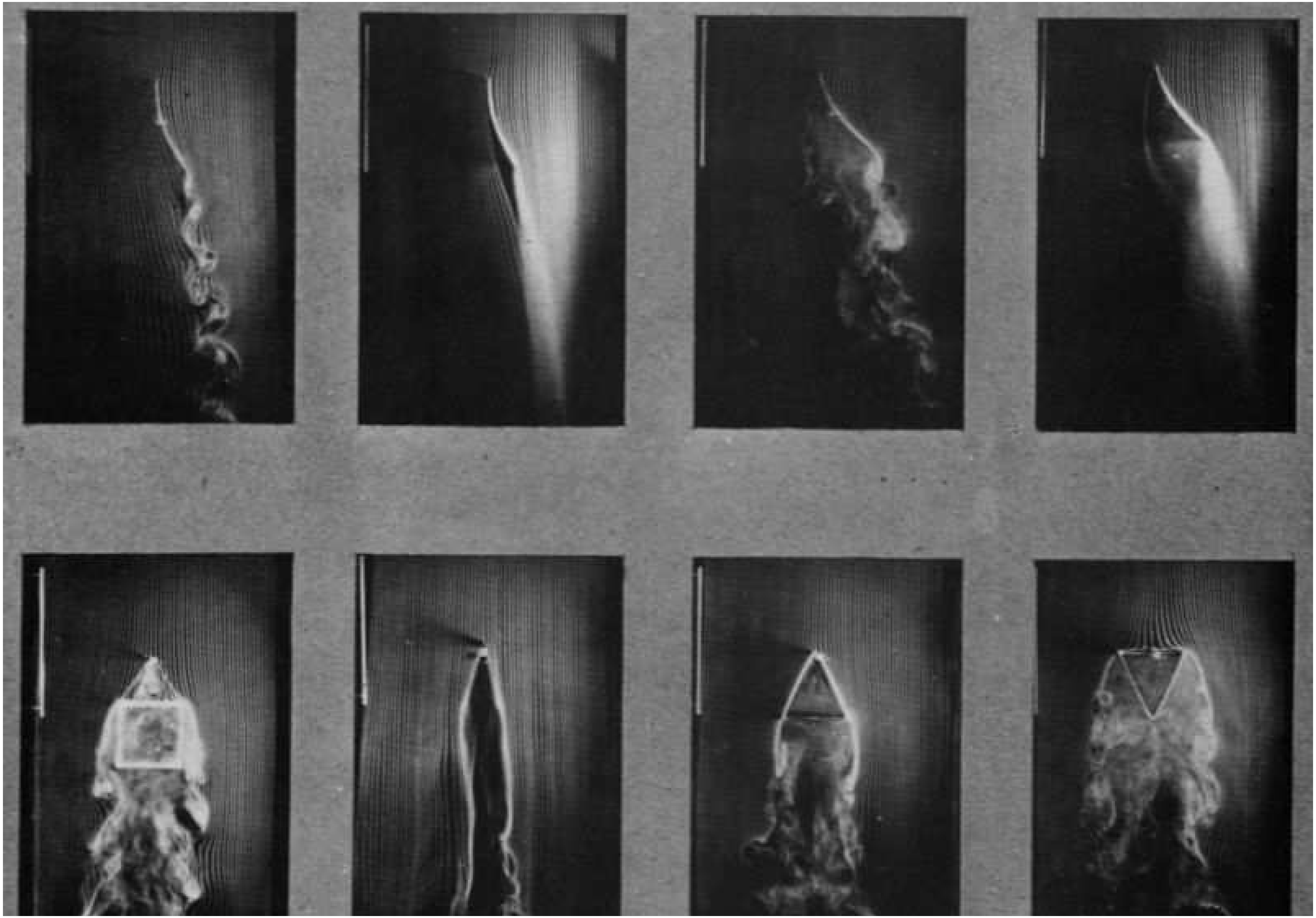
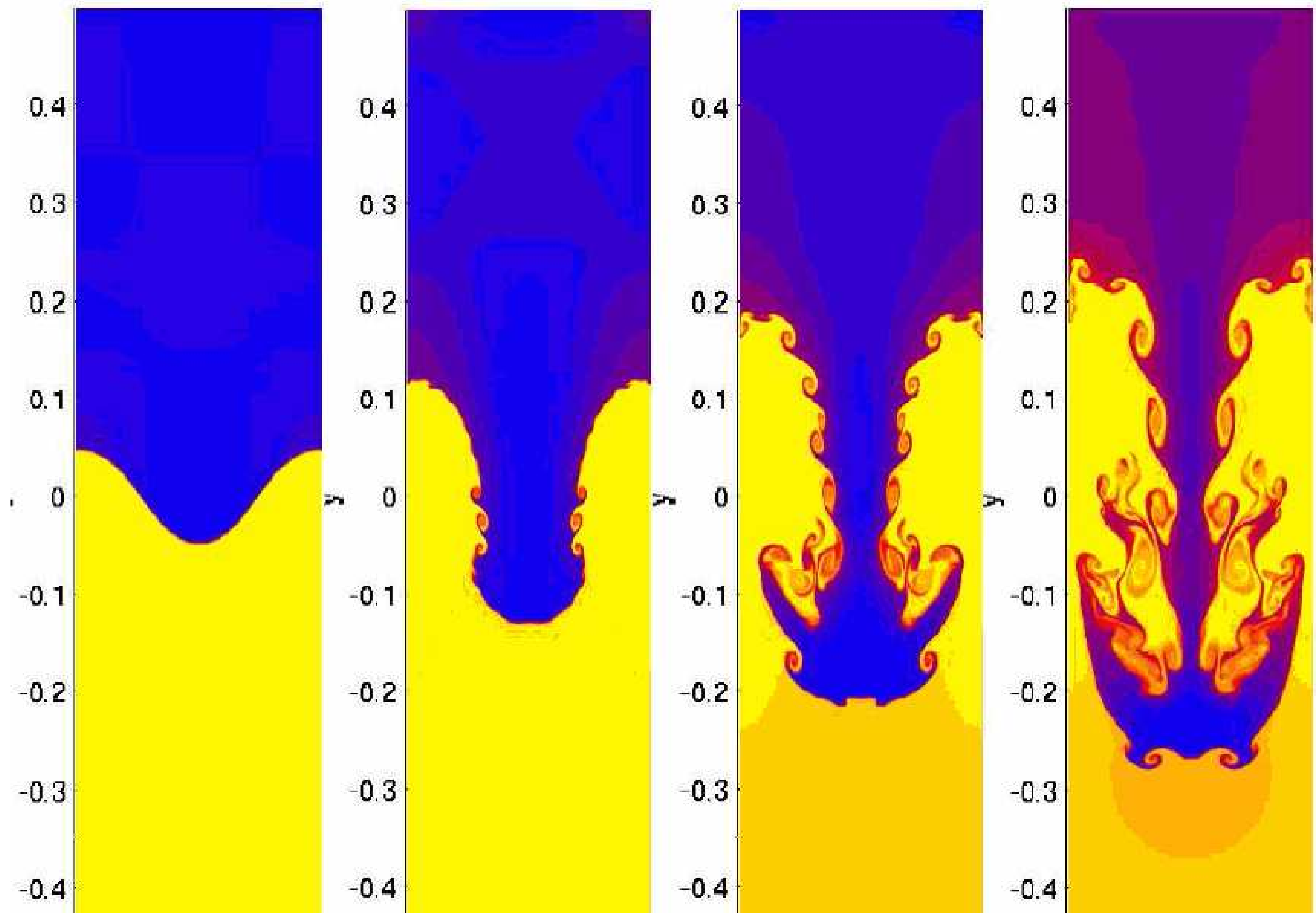
Áramlások fizikája

Bene Gyula
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A

1. Előadás

Tematika




0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
y


© klipsi.com


1/30

 Légy

Ajánlott irodalom:

- Nagy Károly: Elméleti Mechanika (Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002).

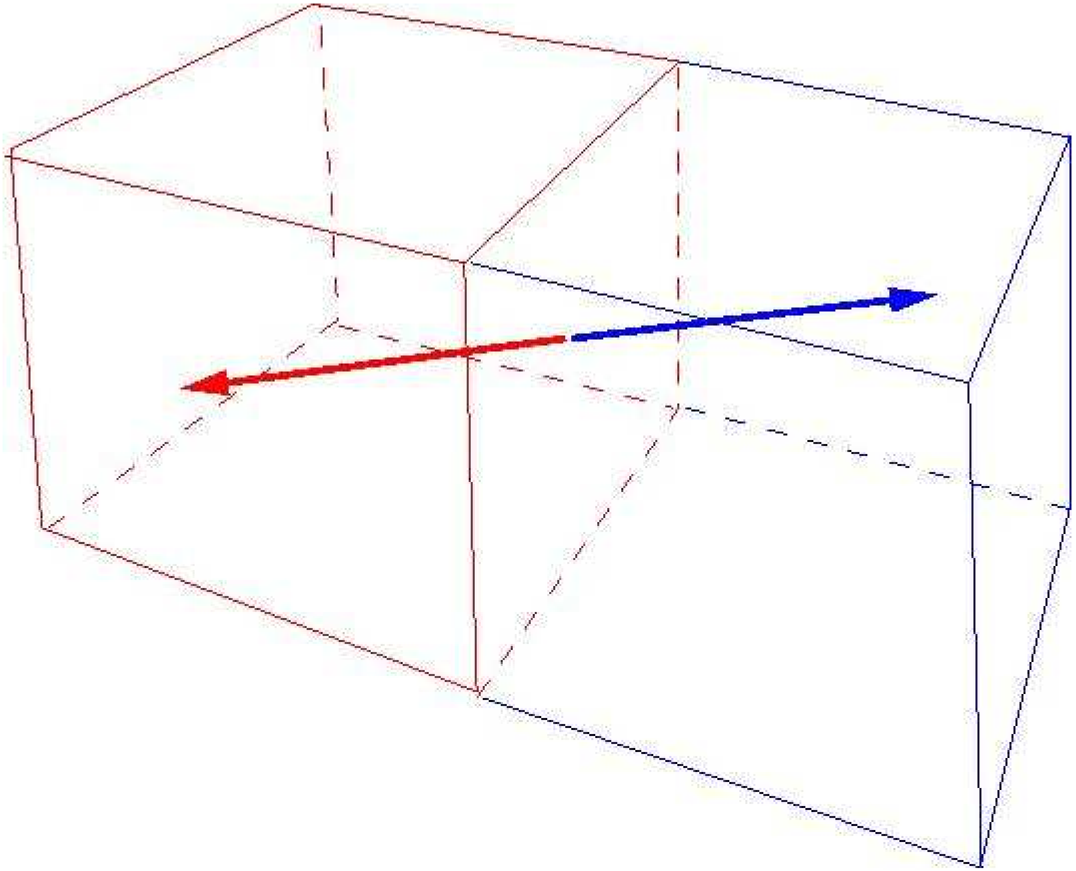
- R.P.Feynman: Mai fizika VII.
- Landau-Lifsic: Elméleti fizika VI. Hidrodinamika (Tankönyvkiadó, 1976).

1.1. Bevezetés

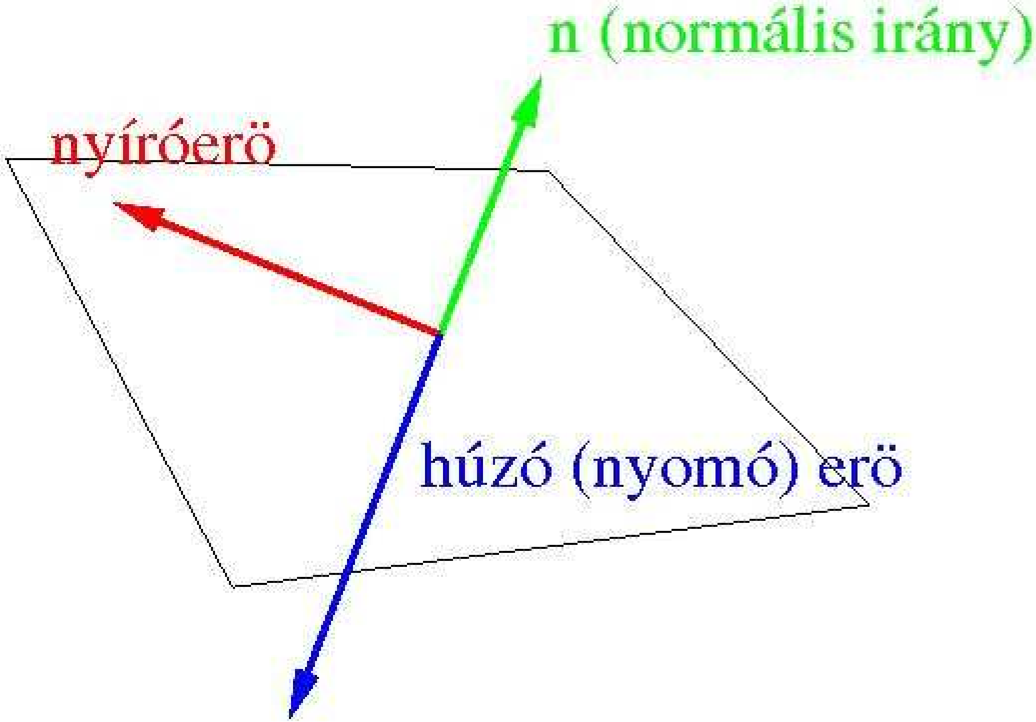
- Folyadékok és gázok mechanikája: a Newton-törvények alkalmazása folytonos közegekre
- Fenomenológiai leírás: folytonosnak tekintett közegek, a különböző anyagok csak állapotegyenletükben és anyagi állandóikban különböznek. Nem vizsgáljuk a mikroszkopikus hátteret.
  A közegbeli hangsebességhez képest kis áramlási sebességek esetén a gázok is jó közelítéssel összenyomhatatlanok.
- Térmennyiségek:
  sebesség:
  $$\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$$
  sűrűség:
  $$\rho(\mathbf{r},t)$$
  nyomás:
  $$p(\mathbf{r},t)$$
  Az állapotegyenletből a $T(\mathbf{r},t)$ hőmérséklet már következik.
- Lokális egyensúly feltételezése: az anyag kis térfogatában áramlás közben is ugyanazok a termodinamikai összefüggések teljesülnek, mint termodinamikai egyensúlyban.

1.2. Hidrosztatika

- Folytonos közegben ható erők:
  - tömegerők (a közeg minden részében hatnak, kis folyadékrész esetén a tömeggel arányosak):
    $$d\mathbf{F} = \rho\mathbf{f}dV$$
    Itt $\mathbf{f}$ az erősűrűség. Pl. gravitációs térben $\mathbf{f} = \mathbf{g}$, ahol $\mathbf{g}$ a nehézségi gyorsulás.
  - felületi erők (a szomszédos folyadékrészek között ható rövid hatótávolságú erők, pl. van der Waals-erők, eredetük: elektrosztatikus + kicserélődési kölcsönhatás a Pauli-elvnek megfelelően):
    - Arányosak a felülettel.



- Húzó és nyomóerők: a felület normálisának irányába mutatnak



- Nyíróerők: a felület normálisára merőleges irányba mutatnak
- Általában:

$$d\mathbf{F} = \sigma \mathbf{n} dA$$

Itt σ a feszültségtenzor
Mátrixjelöléssel:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} dA$$

azaz

$$F_x = \sigma_{xx} n_x dA + \sigma_{xy} n_y dA + \sigma_{xz} n_z dA$$
$$F_y = \sigma_{yx} n_x dA + \sigma_{yy} n_y dA + \sigma_{yz} n_z dA$$
$$F_z = \sigma_{zx} n_x dA + \sigma_{zy} n_y dA + \sigma_{zz} n_z dA$$

Eszerint pl. σ_{zy} az y irányba mutató normálisú egységnyi felületelemre ható erő z komponense.

- Nyugvó folyadékban ill. gázban nyíróerők nem lépnek fel (Pascal törvénye).

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

- Áramlás közben valódi folyadékban fellépnek nyíróerők. Oka: belső súrlódás.
- Ideális folyadék: belső súrlódás elhanyagolható, áramlás közben sem lépnek fel benne nyíróerők.

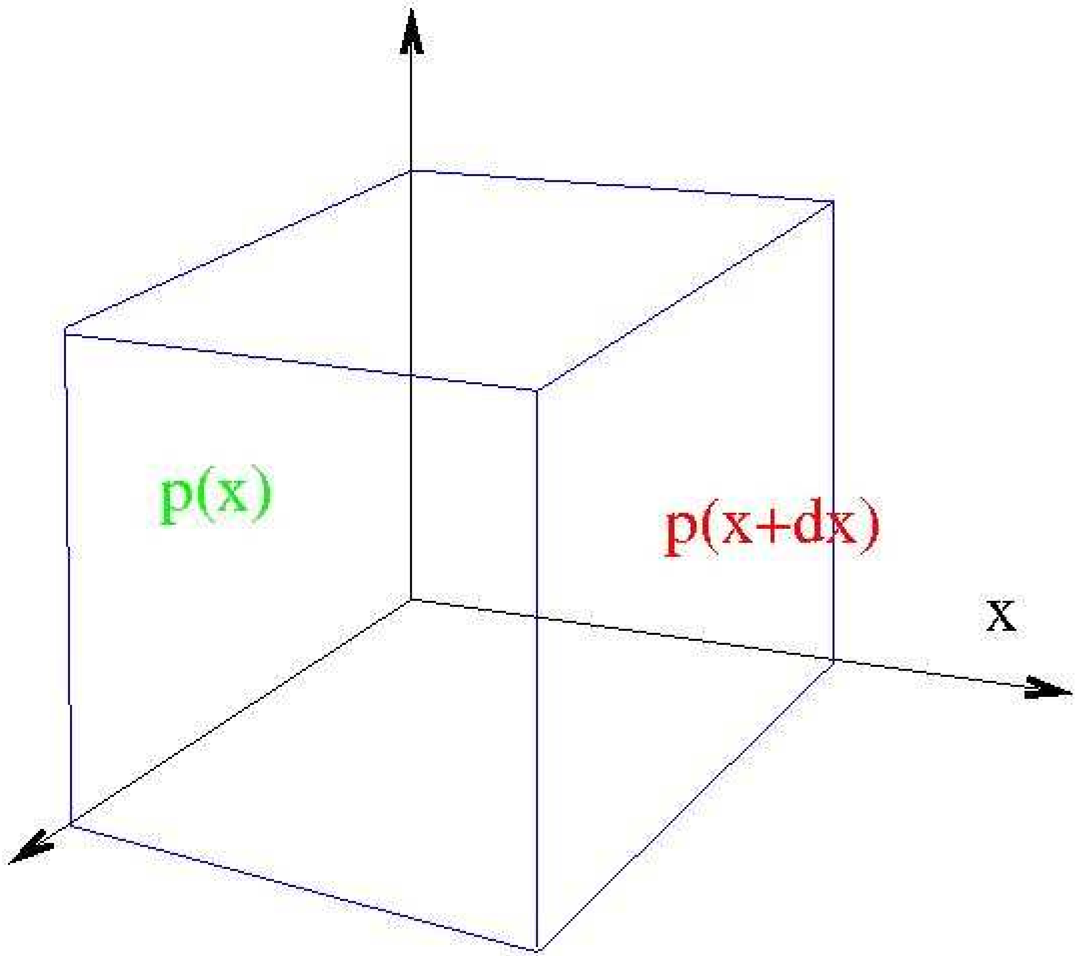
- Egyensúlyban a felületi erő

$$d\mathbf{F} = -p\mathbf{n}dA$$

- Az egyensúly feltétele:
  - Tetszőleges térfogatra az eredő erő zérus:

$$\int \rho \mathbf{f} dV - \oint p dA = 0$$

  - Differenciális alak:
    x komponens:



$$\rho f_x \Delta x \Delta y \Delta z - (p(x+\Delta x) - p(x))\,\Delta y \Delta z = 0$$

$$\rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

- Vektoralakban:

$$\rho \mathbf{f} - grad\, p = 0$$

$$\rho \mathbf{f} - \nabla p = 0$$

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p = 0$$

A hidrosztatikában $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0$. A fenti egyenlet kapcsolat $\rho(\mathbf{r})$ és $p(\mathbf{r})$ között. Ehhez jön még az állapotegyenlet.

- Következmények:
  - Konzervatív tömegerő:

    $$\mathbf{f} = -\nabla U \;\rightarrow\; \rho\nabla U + \nabla p = 0$$

    Az ekvipotenciális felületek és az izobárok egybeesnek.
  - Barotróp folyadék:

    $$\rho = \rho(p)$$

    pl. összenyomhatatlan folyadék, izoterm folyadék, adiabatikus folyadék.

    $$\frac{p}{\rho} = \frac{R}{M}T$$

    $$\frac{p}{\rho^\kappa} = const.$$

    Az egyensúlyi egyenletet integrálva:

    $$U + \int_{p_0}^{p} \frac{dp'}{\rho(p')} = const.$$

    nyomásfüggvény:

    $$P(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp'}{\rho(p')}$$

    Egyensúlyban tehát $U + P = const.$
- Egyensúly nehézségi erőtérben:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \ , \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

ha a z-tengely $\mathbf{g}$-vel párhuzamos. Következmény: ρ, p, T csak z-től függ.

- Összenyomhatatlan folyadék:

$$\rho_0 g z + p = p_0$$

  p, T lineáris függvénye a magasságnak.

- Barométeres magasságformula izotermikus ideális gázra:

$$P(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp'}{p'} \frac{RT_0}{M} = \frac{RT_0}{M} \ln \frac{p}{p_0}$$

$$P + U = const.$$

$$p = p_0 \ \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0} z\right)$$

- Adiabatikus ideális gáz:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\kappa}$$

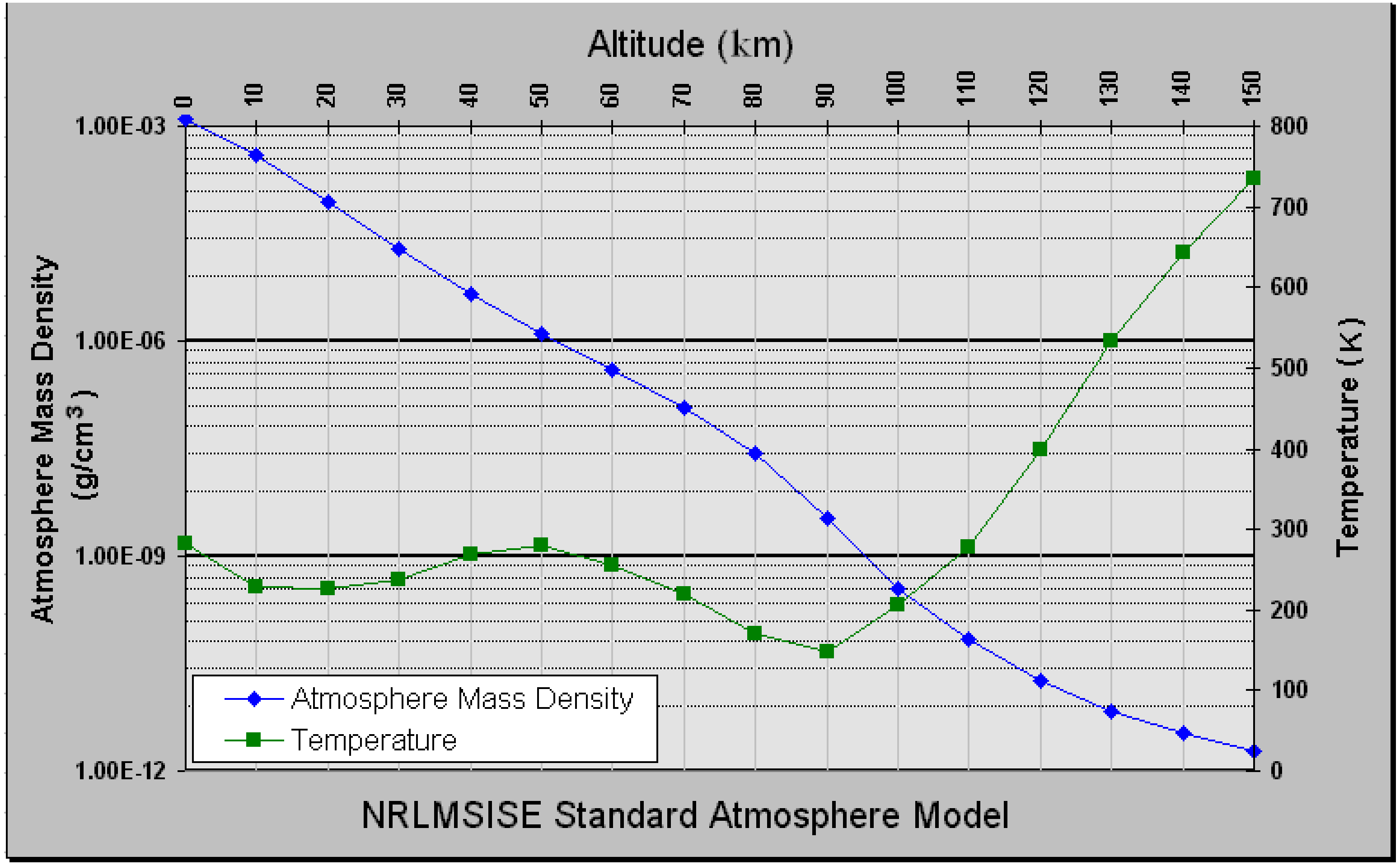
$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp'}{\rho_0 (p'/p_0)^{1/\kappa}} = \frac{p_0^{1/\kappa}}{\rho_0} \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - p_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right) = -gz$$

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\rho_0}{p_0} g z\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

  $\kappa \rightarrow 1$-re

$$p = p_0 \mathrm{e}^{-\frac{\rho_0}{p_0} g z}$$

- Ismert hőmérsékleteloszlású ideális gáz:



$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{Mg}{RT(z)} p$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT(z)} dz$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{R} \int_{z_0=0}^{z} \frac{dz'}{T(z')}$$

1.3. Áramlások leírása

- Áramvonal: pillanatfelvétel a sebességtérről
- Stacionárius áramlás: $\mathbf{v}$, ρ, p időtől független
- Pályavonal: egy kiszemelt kis folyadékrész pályája
  Stacionárius áramlás esetén megegyezik az áramvonallal.
- Változások
  - lokális változások: adott helyen a térmennyiség változása, pl.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

  - szubsztanciális változások: egy kiszemelt kis folyadékrészt mozgásában követünk, eközben vizsgáljuk a térmennyiség változását
    sűrűség:

$$d\rho = \rho(x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt, t + dt) - \rho(x, y, z, t)$$

$$\approx \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dt$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} grad \rho$$

    sebesség:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} grad)\, \mathbf{v}$$

- Anyagmegmaradás: kontinuitási egyenlet
  Felületelemen időegység alatt átáramló tömeg:

$$\rho \mathbf{v} \mathbf{n} dA = \rho \mathbf{v} d\mathbf{A}$$

  megmaradás:

$$-\frac{d}{dt} \int \rho dV = \oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{A}$$

  Gauss-tétele szerint:

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho div \mathbf{v}$$

- $div\ \mathbf{v}$ és $rot\ \mathbf{v}$ jelentése:
  $div\mathbf{v}$ a sűrűség szubsztanciális változását jellemzi. Összenyomhatatlan folyadékban

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \ \rightarrow \ div\ \mathbf{v} = 0$$

  $rot\ \mathbf{v}$ a folyadékelem forgó mozgását jellemzi. Pl. merev testként forgó folyadék sebességtere:

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$$

$$rot\ \mathbf{v} = \mathbf{2}\omega$$

  Általában az $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}\mathbf{rot\ v}$ örvényvektor a lokális szögsebesség vektora.

Next Up Previous

Gyula Bene 2008-02-14