Áramlások fizikája

Bene Gyula
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A

2. Előadás

2.1. Ismétlés

- Hidrosztatika, egyensúlyi feltételek:

$$\int \rho \mathbf{f} dV - \oint p dA = 0$$

$$\rho \mathbf{f} - grad\, p = 0$$

- Áramvonal, pályavonal
- Időegység alatti változások: lokális és szubsztanciális derivált

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} grad)\, \mathbf{v}$$

- Tömegmegmaradás, kontinuitási egyenlet

$$-\frac{d}{dt} \int \rho dV = \oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{A}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{v}) = 0$$

- A sebességtér divergenciája és rotációja

$$div\ \mathbf{v} \ = \ \nabla \mathbf{v} \ = \ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$rot\ \mathbf{v} \ = \ \nabla \ \times \ \mathbf{v} \ = \ \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

2.2. Ideális folyadék mozgásegyenletei

Ideális folyadék: irreverzibilis folyamatok (belső súrlódás, hővezetés) nincsenek (valódi folyadékra jó közelítés lehet) $\rightarrow$ nincsenek nyíróerők.

- Euler-egyenlet (mozgásegyenlet)
  a ΔV térfogatú folyadékrészre, mivel a felületi erő $-pd\mathbf{F}$ (mint a sztatikában)

$$\rho\ \Delta V\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\ \mathbf{f}\ \Delta V - grad\ p\ \Delta V$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\ grad)\mathbf{v} = \mathbf{f}\ - \frac{1}{\rho}\ grad\ p$$

Nemlineáris parciális differenciálegyenlet + határfeltételek

- Kontinuitási egyenlet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{v}) = 0$$

- Az ötödik egyenlet (egy pályavonal mentén):

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

Itt s a fajlagos entrópia, $s = S/m$, vagyis a tömegegységre eső entrópia.
Abból következik, hogy ideális folyadékban nincs belső súrlódás és hőcsere, valamint lokális termodinamikai egyensúly áll fent, azaz kis folyadékelem állapotváltozása egyensúlyi állapotokon keresztül történik.

Ha kezdetben az entrópia mindenütt azonos (tipikus eset), akkor $s = const.$ (helytől függetlenül)
s általában ρ és p függvénye (állandó összetételű folyadékot feltételezve). $s(\rho, p) = const.$ adiabatikus állapotegyenlet → a folyadék barotróp.
$p/\rho^\kappa = \acute{a}lland\acute{o}$ egy pályavonal mentén. $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$

- Következmény: a folyadékrész belső energiája csak a térfogati munka révén változik

$$d\epsilon = Tds - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = -\frac{p}{\rho}div\ \mathbf{v}$$

Összenyomhatatlan folyadék esetén $\epsilon = \acute{a}ll.$

2.3. A Bernoulli-egyenlet - munkatétel

- Előkészítés:
  - $$(\mathbf{v}\ grad)\mathbf{v} = grad\ \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times rot\ \mathbf{v}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{v} \times rot\ \mathbf{v})_x &= v_y\left(\partial_x v_y - \partial_y v_x\right) - v_z\left(\partial_z v_x - \partial_x v_z\right) \\ &= v_x\partial_x v_x + v_y\partial_x v_y + v_z\partial_x v_z - v_x\partial_x v_x - v_y\partial_y v_x - v_z\partial_z v_x\end{aligned}$$

- Fajlagos entalpia:

$$w = \epsilon + \frac{p}{\rho}$$

$$dw = \underbrace{d\epsilon - \frac{p}{\rho^2}d\rho}_{=0,\ \text{mert}\ ds=0} + \frac{1}{\rho}dp$$

$$dw = \frac{1}{\rho}dp$$

$$w = \int \frac{dp}{\rho}\ ,$$

ahol $\rho(p)$ az adiabatikus állapotváltozásnak felel meg. w tehát az "adiabatikus nyomásfüggvény".

$$grad\ w = \frac{1}{\rho}grad\ p$$

- Stacionárius áramlás konzervatív tömegerővel
Euler-egyenlet:

$$(\mathbf{v}\ grad)\mathbf{v} = -grad\ V\ - \underbrace{\frac{1}{\rho}grad\ p}_{grad\ w}$$

$$grad\ \frac{v^2}{2} - \underbrace{\mathbf{v}\times rot\ \mathbf{v}}_{\perp\ \mathbf{v}-\mathbf{re}} + grad\ V\ + grad\ w = 0 \quad / \cdot \mathbf{v}$$

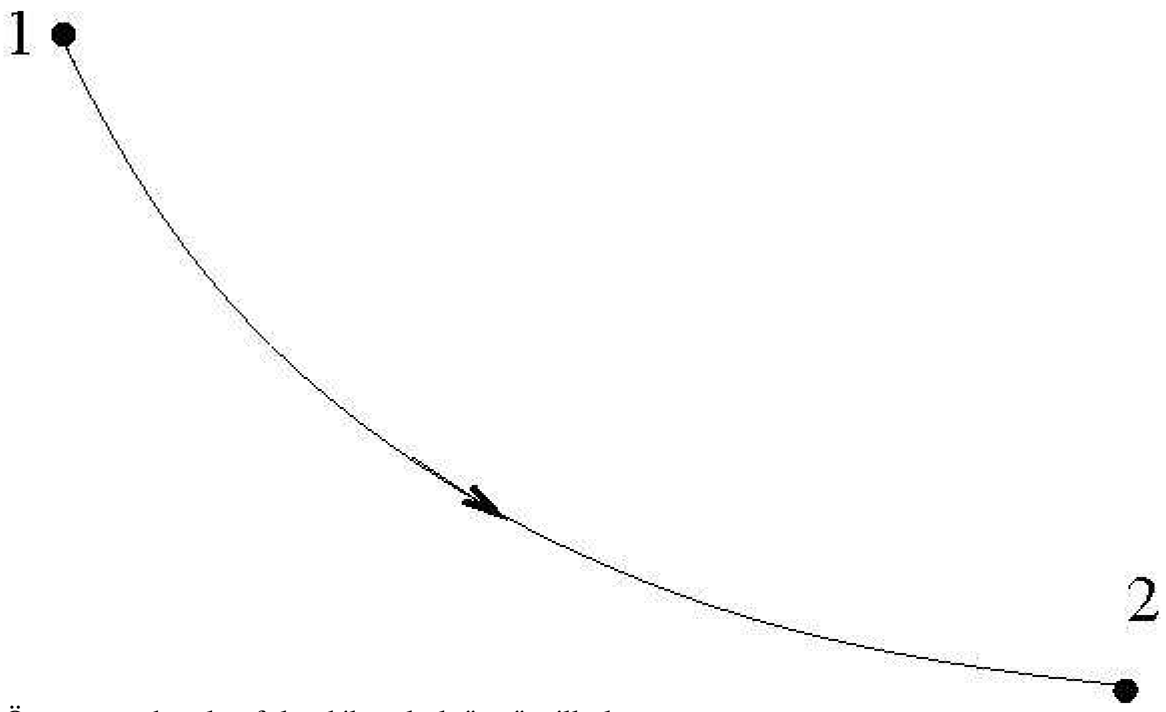
$$\mathbf{v}\cdot grad\left(\frac{v^2}{2} + V + w\right) = 0$$

$\mathbf{v}\cdot grad$ a sebesség irányú derivált.
Az egyenlet tehát azt jelenti, hogy

$$\frac{v^2}{2} + V + w = \acute{a}lland\acute{o} \qquad \text{(Bernoulli-egyenlet)}$$

az áramvonal mentén (ami most egybesik a pályavonallal).
Munkatétel: egy folyadékrészecskére

$$\frac{v_2^2}{2} + V_2 - \left(\frac{v_1^2}{2} + V_1\right) = \underbrace{-\int_1^2 \frac{1}{\rho} \underbrace{grad\, p \cdot d\mathbf{s}}_{dp}}_{\text{A felületi erő munkája}} = \underbrace{-\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho}}_{-w_2+w_1}$$



- Összenyomhatalan folyadékra, külső erő nélkül

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} = \frac{p_0}{\rho_0}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\rho_0 v^2}_{\text{torlónyomás}} + p = p_0$$

Mivel $p > 0$

$$v^2 \leq \frac{2p_0}{\rho_0}$$

egyébként buborékképződés, kavitáció.

- Örvénymentes áramlások
  - Örvénymentes:

$$rot\mathbf{v} = 0$$

mindenütt az áramlási térben.
Ekkor létezik a $\mathbf{\Phi}(\mathbf{r}, t)$ sebességpotenciál, melyre

$$\mathbf{v} = grad\ \mathbf{\Phi}$$

Legyen a tömegerő konzervatív, és tegyük fel, hogy $s = konst.$, tehát $\frac{1}{\rho} grad\ p = grad\ w$ minden pontban.
Az Eiler-egyenlet ekkor

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}}_{grad \frac{\partial \Phi}{\partial t}} + grad\ \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \underbrace{rot\ \mathbf{v}}_{=0} = -grad\ V - grad\ w$$

$$grad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + V + w \right) = 0$$

azaz

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + V + w = F(t)$$

ahol $F(t)$ csak az időtől függ.
Ha a tömegerő nem konzervatív, vagy a folyadék nem barotróp (pl. mert s nem állandó), akkor általában nem létezik örvénymentes áramlás.

- Stacionárius eset

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}=0 \quad \Rightarrow \quad F(t)=\text{állandó} \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{2}+V+w=\text{állandó az egész térben.}$$

  Általánosabb, mint a Bernoulli-egyenlet.

- Összenyomhatatlan folyadék örvénymentes áramlása

$$\left.\begin{array}{r} div\mathbf{v}=0 \\ rot\mathbf{v}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle\Phi=0 \quad +\text{határfeltételek}$$

Az egyenlet meghatározza a sebességteret. Az időfüggés csak a határfeltételekben jelentkezik.
A nyomás a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+V+\frac{p}{\rho}=F(t)$$

egyenletből számolható (F beleolvasztható $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$-be). A nemlinearitás csak itt jelentkezik.

  - Stacionárius eset

$$\frac{p}{\rho}=konst.-V-\frac{v^2}{2}$$

  - Példák sebeségpotenciálra:

$$\Phi=\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{r},t)=grad\Phi=\mathbf{v}_0$$

$$\Phi=-\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{r} \Rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{r},t)=grad\Phi=\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

Next Up Previous

Gyula Bene 2008-02-14