Áramlások fizikája

Bene Gyula
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A

3. Előadás

3.1. Ismétlés

- Ideális folyadék mozgásegyenletei:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\ grad)\mathbf{v} = \mathbf{f}\ - \frac{1}{\rho}\ grad\ p$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

- Bernoulli-egyenlet:
  (stacionárius áramlás konzervatív tömegerővel)

$$\frac{v^2}{2} + V + w = \text{állandó az áramvonal mentén}$$

- Örvénymentes áramlás:

$$rot\mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = grad\ \Phi$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + V + w = F(t)$$

- Összenyomhatatlan folyadék örvénymentes áramlása:

$$\left.\begin{array}{l} div\ \mathbf{v} = 0 \\ rot\ \mathbf{v} = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \triangle\mathbf{\Phi} = 0 \quad + \text{határfeltételek}$$

3.2. Örvénymentes áramlások (folytatás)

- Cirkuláció örvénymentes áramlásban:
  Adott C görbére:

$$\Gamma_C = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

  Ha a C zárt görbére fektethető olyan felület, amely teljesen az áramlás tartományában van, akkor

$$\Gamma_C = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int rot\mathbf{v} \cdot d\mathbf{F} = 0$$

  Felhasználtuk Stokes tételét.
  Az ilyen tulajdonságú görbék a folyadék belsejében folytonos deformációval egy ponttá húzhatók össze. Ha ez minden zárt görbére teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a tartomány (jelen esetben az áramlási tér) egyszeresen összefüggő.

3.3. Síkbeli áramlások

- Síkbeli áramlás: az áramlás jellemzői a z tengelyre merőleges síkban azonosak, semmi nem függ z-től. $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(x, y)$

$$\frac{\partial^2\mathbf{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{\Phi}}{\partial y^2} = 0$$

  Komplex potenciál és sebesség:

$$z = x + iy$$

Itt z nem a z koordináta, hanem egy komplex szám!

$$f(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{df}{dz} \quad y = konst.$$

$$\frac{df}{idy} = -i\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{df}{dz} \quad x = konst.$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{és} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Cauchy-Riemann-feltételek.
Következmény:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

Továbbá

$$grad\Phi \cdot grad\psi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \; ,$$

tehát a $\Phi = const.$ és $\Psi = const.$ vonalak egymásra merőlegesek. $\Phi = \mathrm{Re} f$ egy lehetséges áramlás sebességpotenciálja, $\Psi = \mathrm{Im} f$ az ún. áramlási függvény. Szintvonalai merőlegesek Φ szintvonalaira, azaz áramvonalak. Tehát

$$\Psi = konst.$$

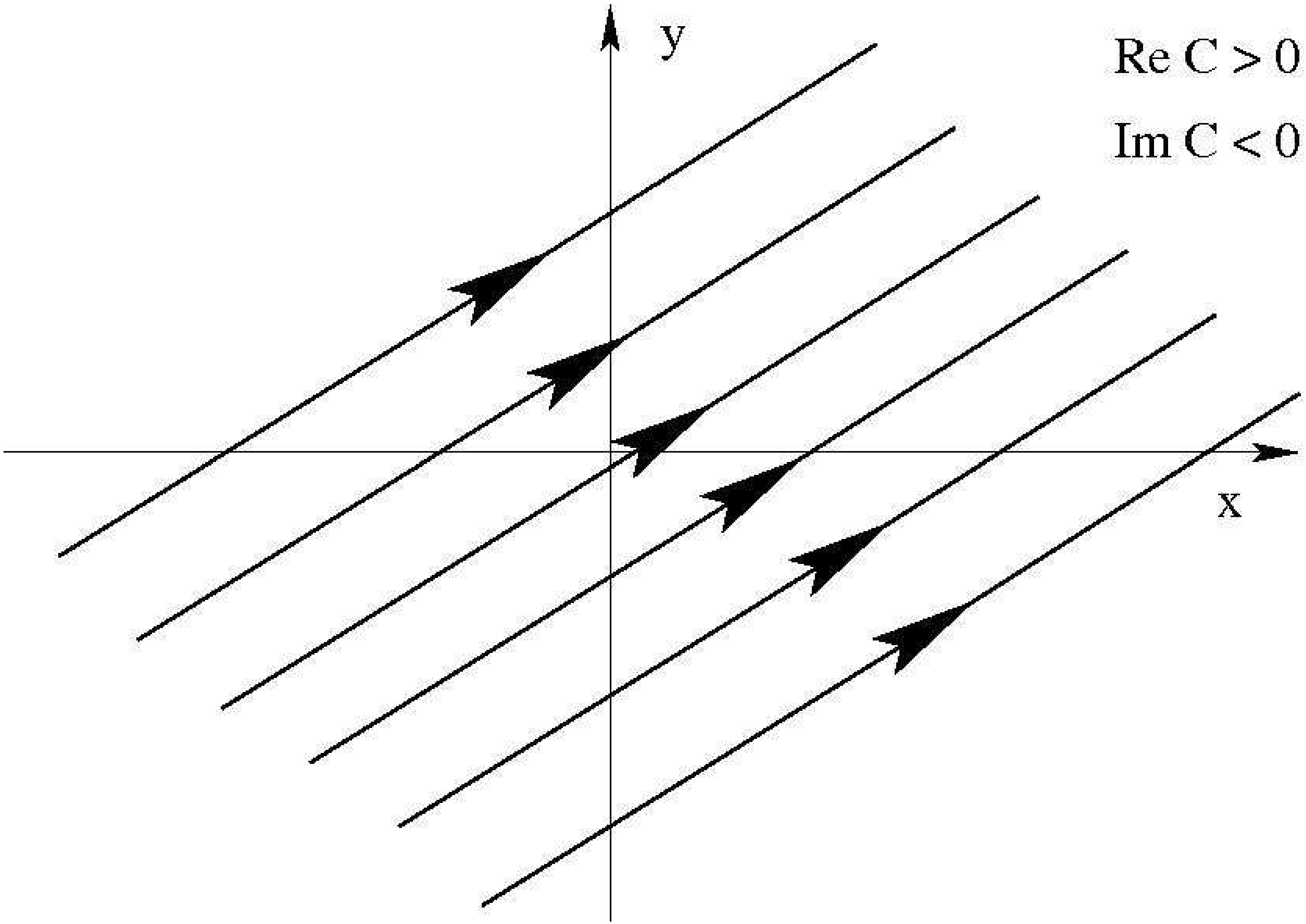
az áramvonalak egyenlete.
$w = f(z)$ az áramlás komplex potenciálja.
Komplex sebesség:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{df}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}_{v_x} - i\underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}_{v_y} = v_x - iv_y$$

- Példák:

- $$w = C\, z \qquad \Phi = \mathrm{Re}\, C\, x - \mathrm{Im}\, C\, y$$
  $$\Psi = \mathrm{Im}\, C\, x + \mathrm{Re}\, C\, y$$
  $$\frac{dw}{dz} = C = \mathrm{Re}\, C + i\, \mathrm{Im}\, C$$

  Párhuzamos áramlás


y
Re C > 0
Im C < 0
x

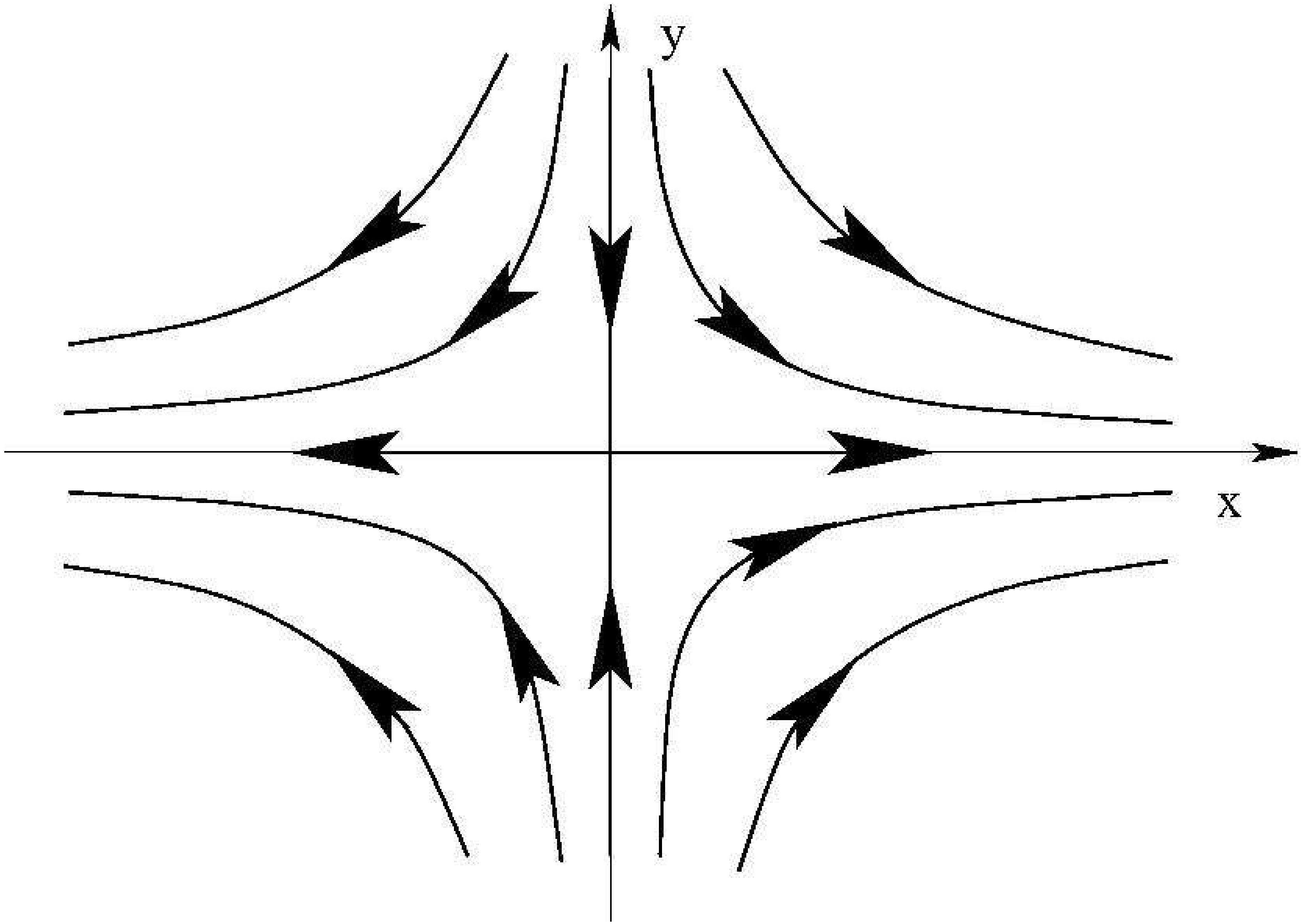
○

$$w = C\ z^2 \quad (C \text{ valós}) \quad \Phi = \ C\ (x^2 - y^2)$$

$$\Psi = \ 2C\ x\ y$$

$$\frac{dw}{dz} = \ 2C\ z = 2C\ (x + iy)$$

Torlódás síknál
Áramlás 90°-os sarokban


y
x

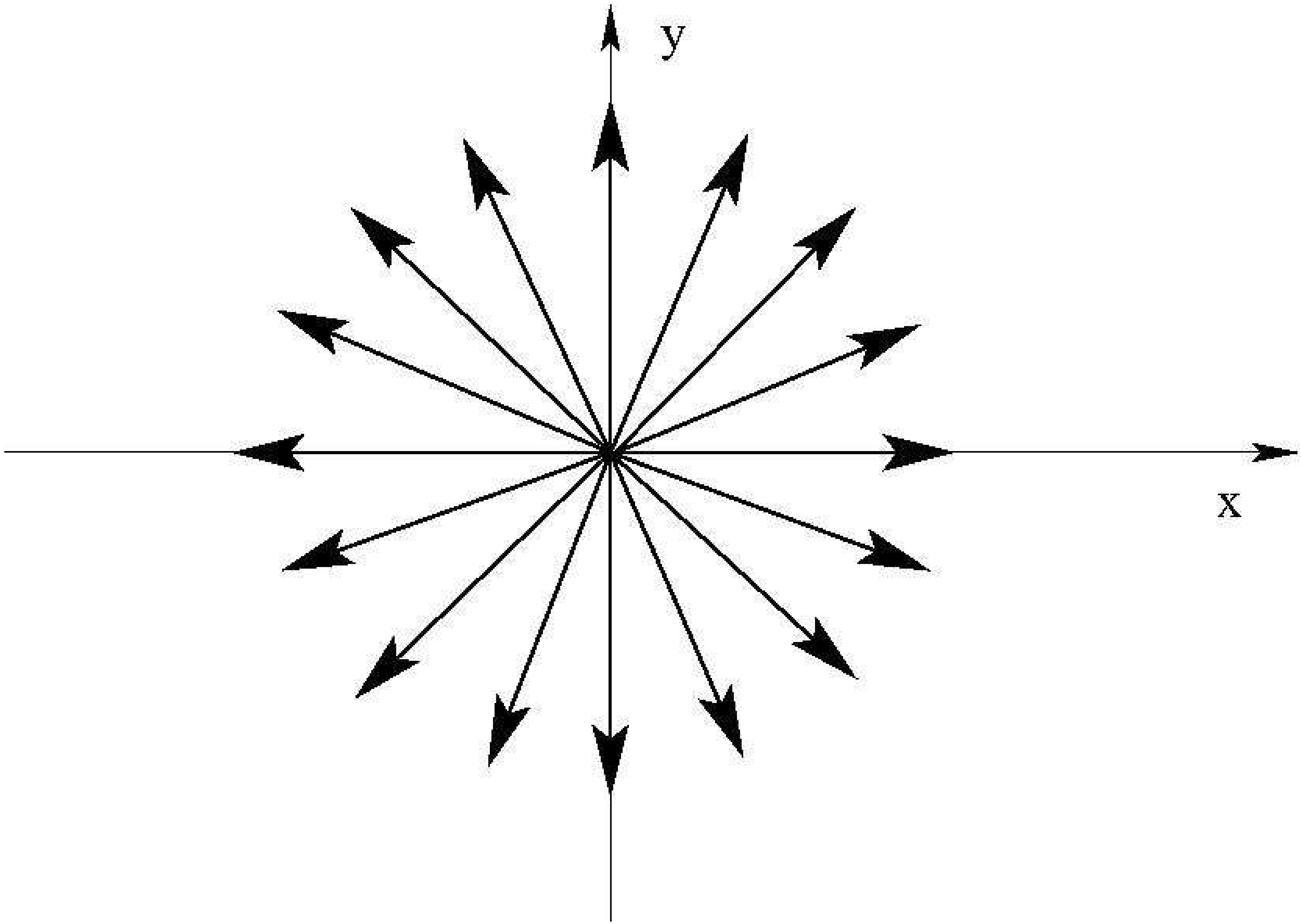
◦

$$w = C \ \ln \ z \quad (C \text{ valós, pozitív}) \quad \Phi = \ C \ \ln \ r$$

$$\Psi = \ C \ \varphi$$

$$\frac{dw}{dz} = \ \frac{C}{z} = \frac{C}{|z|^2}(x - \ iy)$$

Síkbeli forrás

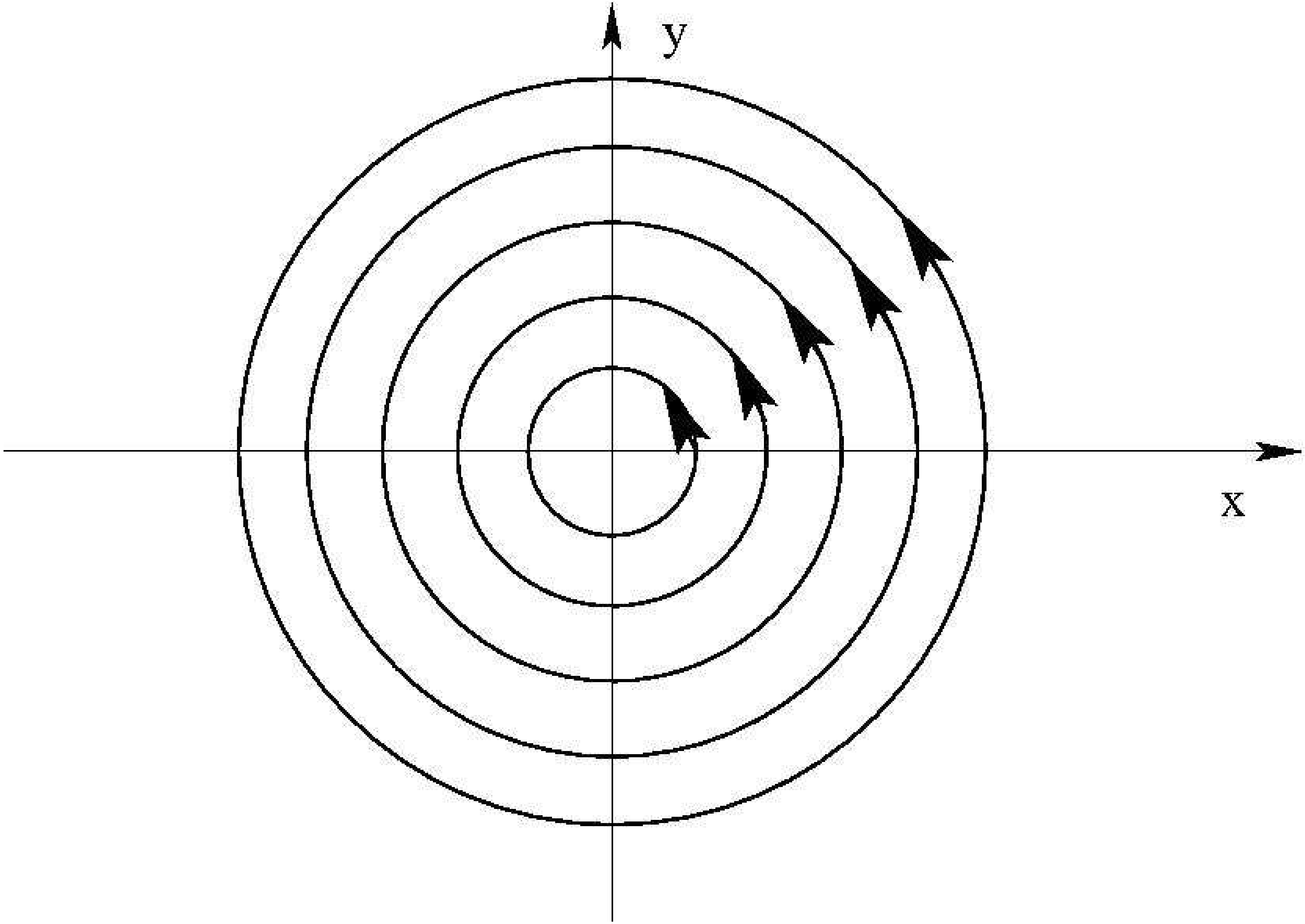

y
x

$$w = -iC \ \ln \ z \quad (C \text{ valós, pozitív}) \quad \Phi = \ C \ \varphi$$

$$\Psi = \ -C \ \ln \ r$$

$$\frac{dw}{dz} = \ \frac{-iC}{z} = \frac{C}{|z|^2}(-y - \ ix)$$

Síkbeli cirkulációs áramlás


y
x

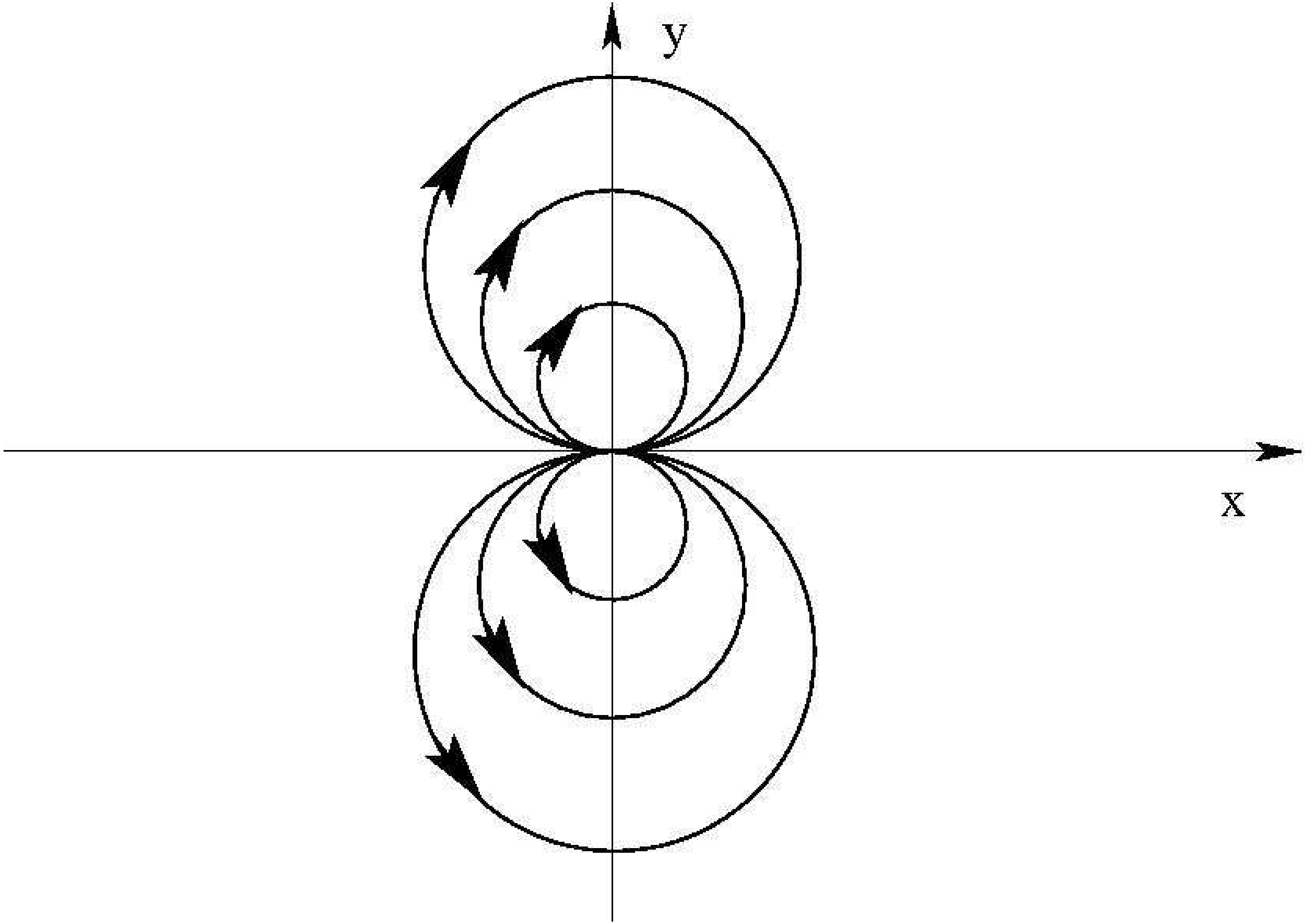
○

$$w = \frac{C}{z} \quad (C \text{ valós}) \quad \Phi = \frac{C}{r} \cos \varphi$$

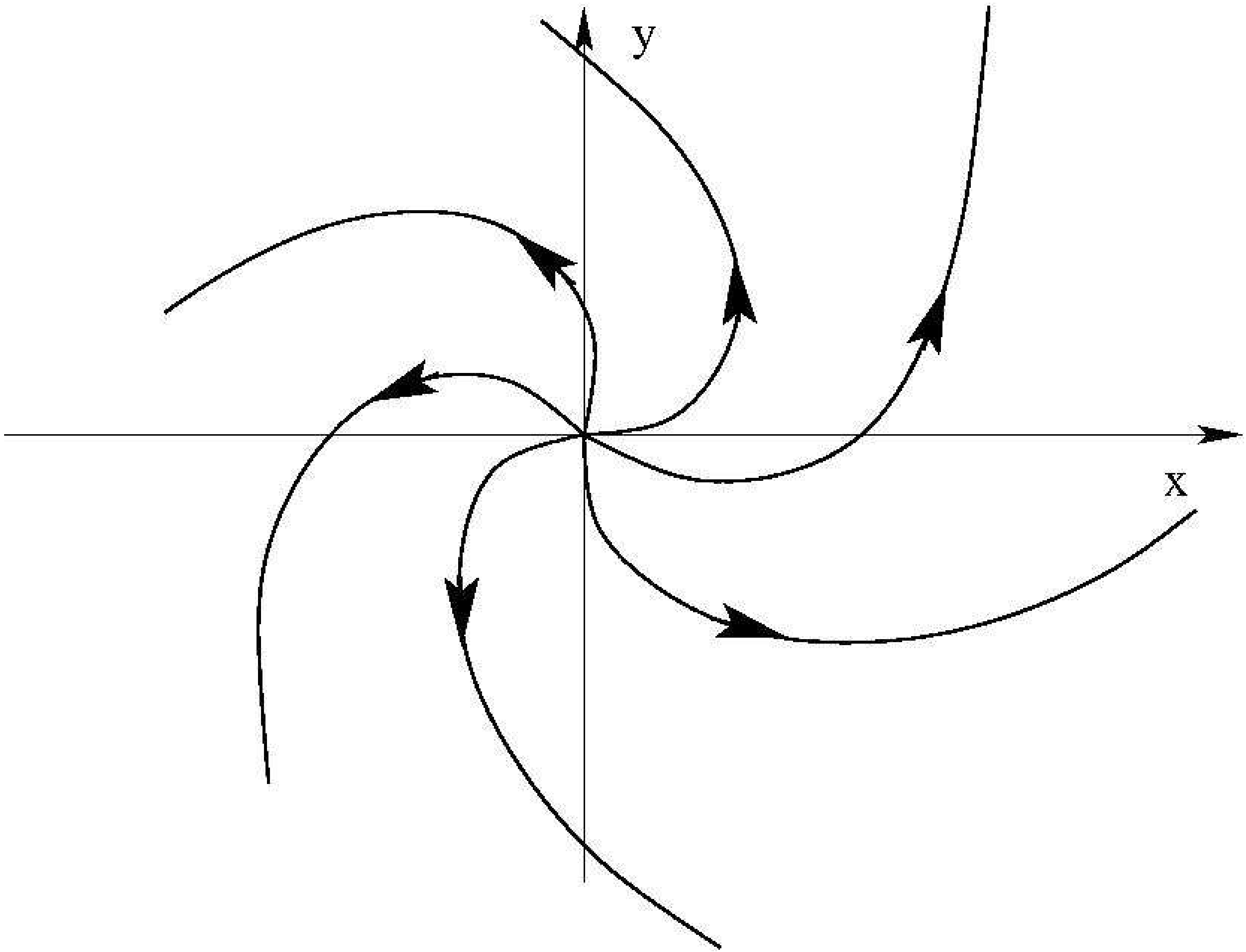
$$\Psi = -\frac{C}{r} \sin \varphi$$

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{C}{z^2} = \frac{C}{|z|^2}((y^2 - x^2) + 2ixy)$$

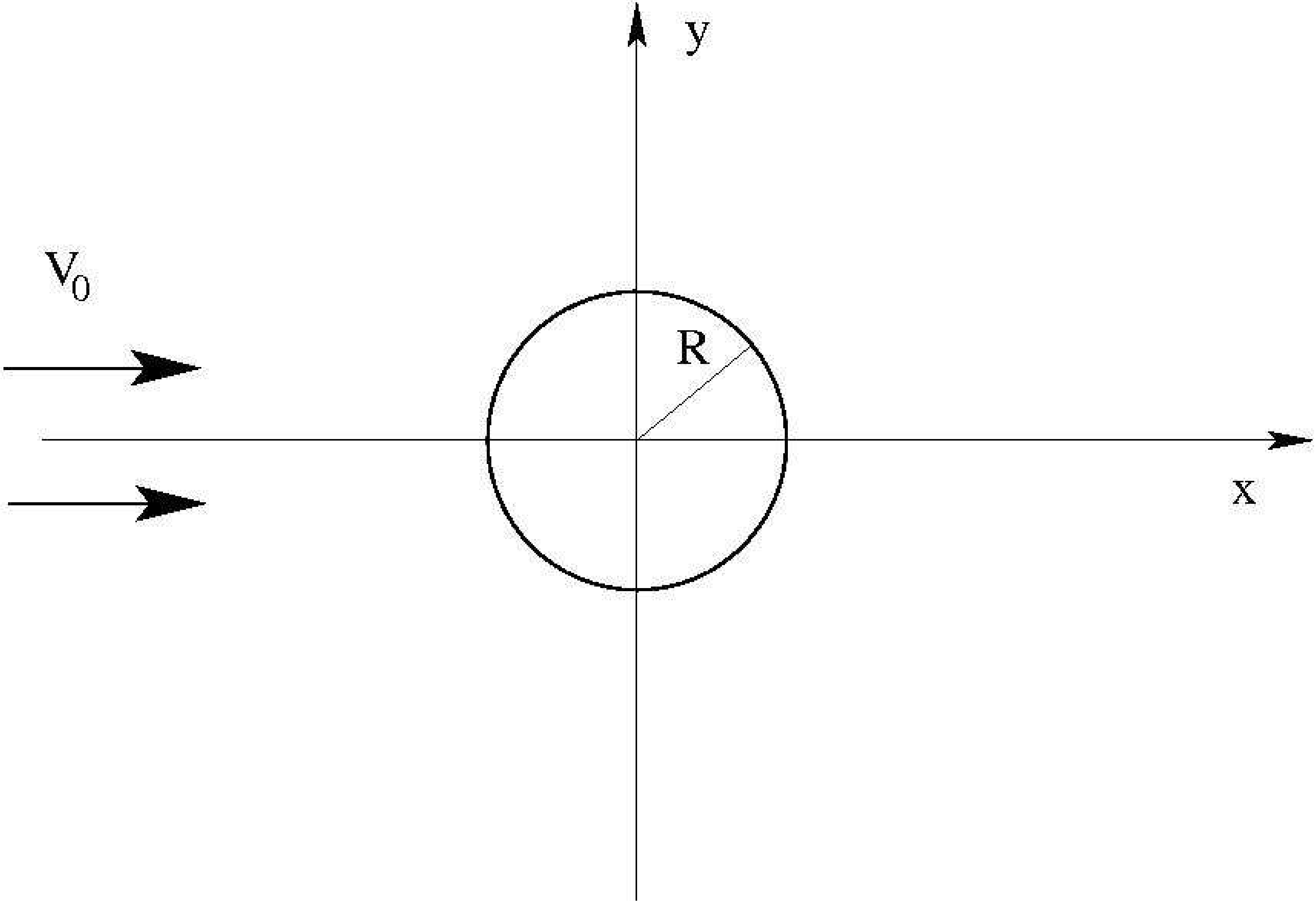
Dipólus: közeli forrás és nyelő



- $$w = (C_1 + iC_2)\ln\ z$$



- Henger áramló folyadékban



A hengertől nagy távolságban a sebesség x irányú, homogén. Ezért a komplex sebességben nem szerepelhet z pozitív hatványa (akkor $v_\infty = \infty$ lenne). Így csak konstans és negatív hatványok lehetnek:

$$\frac{dw}{dz} = v_0 + \frac{C_{-1}}{z} + \frac{C_{-2}}{z^2} + \dots$$
$$w = v_0\, z + C_{-1}\ln z - \frac{C_{-2}}{z} - \frac{C_{-3}}{2z^2} - \dots$$
$$z = r\mathrm{e}^{i\varphi}$$
$$C_{-k} = A_k + iB_k$$

Az áramlási függvény:

$$\Psi = \mathrm{Im}\, w = v_0\, r\sin\varphi + A_1\varphi + B_1\ln r + \frac{A_2}{r}\sin\varphi - \frac{B_2}{r}\cos\varphi + \frac{A_3}{2r^2}\sin 2\varphi$$

Peremfeltétel: $r = R$-re $v_n = 0$, azaz a sebesség érintőirányú, tehát $\Psi|_R = konst.$ az R sugarú körön. Ebből következik:

$$A_1 = 0\ , \quad v_0 R + \frac{A_2}{R} = 0\ , \quad B_2 = 0\ , \quad A_3 = A_4 = \dots = 0\ , \quad B_3 = B_4 = \dots = 0$$

$$A_2 = -v_0 R^2\ . \quad \text{Írjuk, hogy} \quad B_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi}$$

A peremfeltételt kielégítő alak tehát

$$w = v_0 z + \frac{v_0 R^2}{z} - i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z$$

Next Up Previous

Gyula Bene 2008-02-14