Áramlások fizikája

Bene Gyula
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A

4. Előadás

4.1. Ismétlés

- Cirkuláció:

$$\Gamma_C = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

- Tetszőleges $w(z)$ differenciálható komplex függvény valamilyen síkbeli potenciáláramlást ír le a következő szabályok szerint:
  - $$z = x + iy$$
  - $$w(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y)$$

    A $w(z)$ komplex függvény valós része a $\Phi(x,y)$ sebességpotenciál, képzetes része a $\Psi(x,y)$ áramlási függvény.
  - $$\Psi(x,y) = konst.$$

    az áramvonalak egyenlete
  - $$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y$$

    határozza meg a sebességkomponenseket.
  - Az áramló folyadékot határoló szilárd falakon a sebesség normális komponense eltűnik, tehát a falakon a sebesség érintő irányú, ami azt jelenti, hogy a falak mentén halad egy áramvonal, így ott a $\Psi(x,y)$ áramlási függvény konstans.

- Példák síkbeli potenciáláramlásra:
  - Párhuzamos (homogén) áramlás:

$$w = C\ z$$

  - Torlódás síknál ill. áramlás 90°-os sarokban:

$$w = C\ z^2 \quad (C \text{ valós})$$

  - Síkbeli forrás/nyelő:

$$w = C\ \ln\ z \quad (C \text{ valós})$$

  - Síkbeli cirkulációs áramlás:

$$w = -iC\ \ln\ z \quad (C \text{ valós})$$

  - Dipólus:

$$w = \frac{C}{z} \quad (C \text{ valós})$$

  - Henger körüli áramlás:

$$w = v_0 z + \frac{v_0 R^2}{z} - i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z$$

4.2. Síkbeli áramlások (folytatás)

- Henger áramló folyadékban
  A sebességpotenciál:

$$\Phi = \mathrm{Re}\, w = v_0 \cos\varphi \left(r + \frac{R^2}{r} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\varphi$$

  Az áramlási függvény:

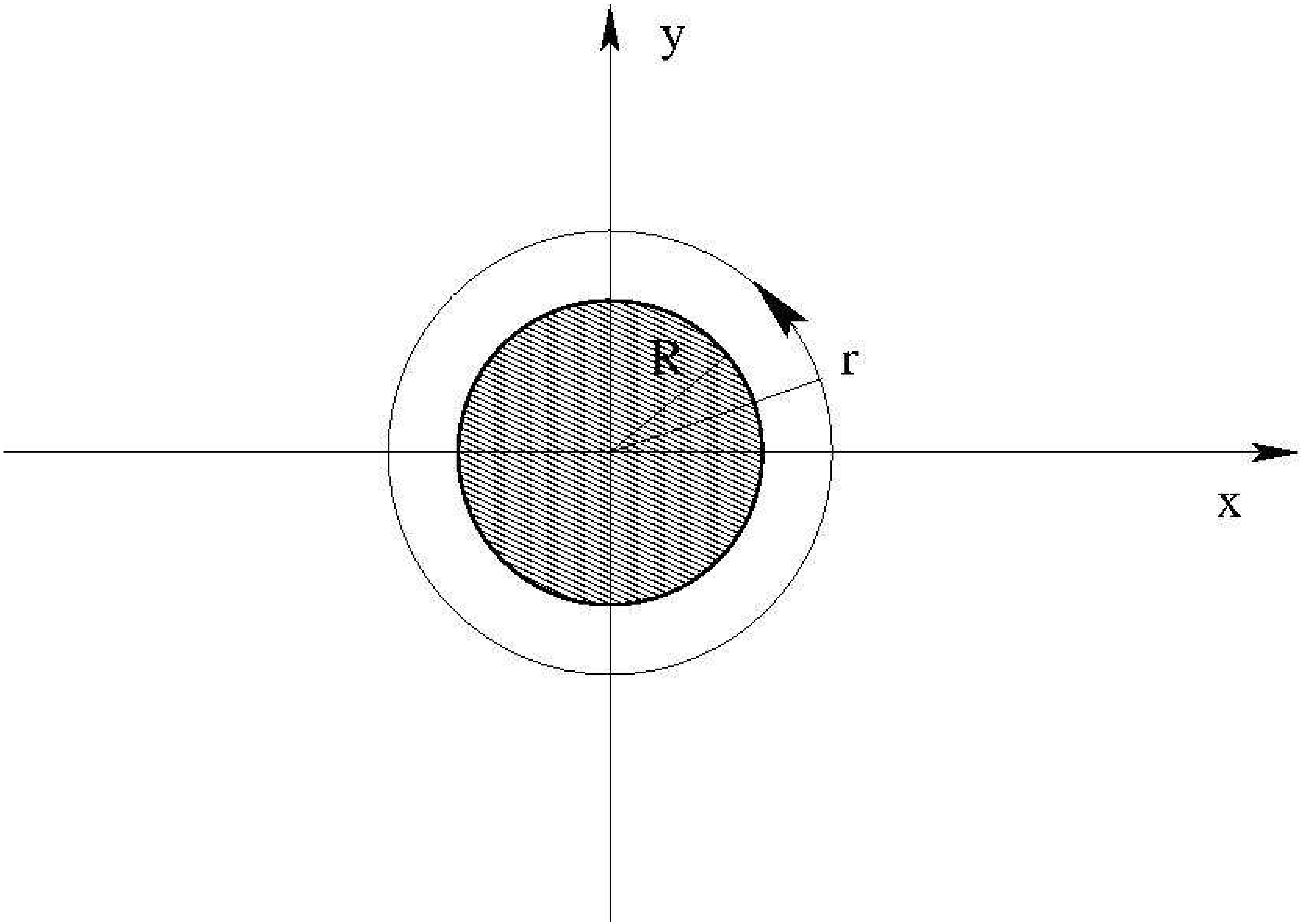
$$\Psi = \mathrm{Im}\, w = v_0 \sin\varphi \left(r - \frac{R^2}{r} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

Sebességkomponensek:

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = v_0 \cos\varphi \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -v_0 \sin\varphi \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi\, r}$$

A cirkuláció nem redukálható zárt görbén:



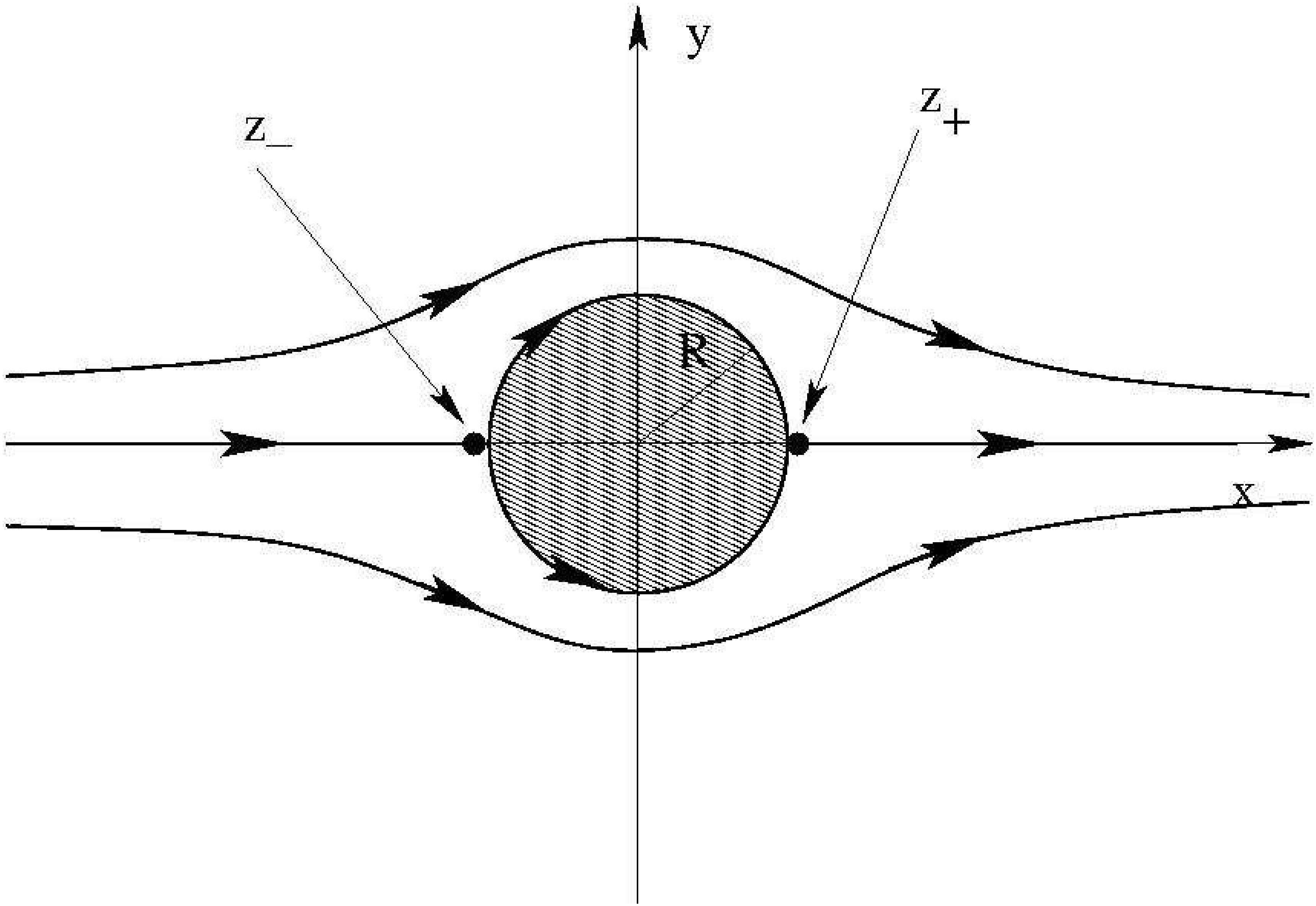
$$\oint \mathbf{v}d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} v_\varphi r d\varphi = \Gamma - v_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) r \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi = \Gamma$$

Torlópontok: zérus sebességű pontok.

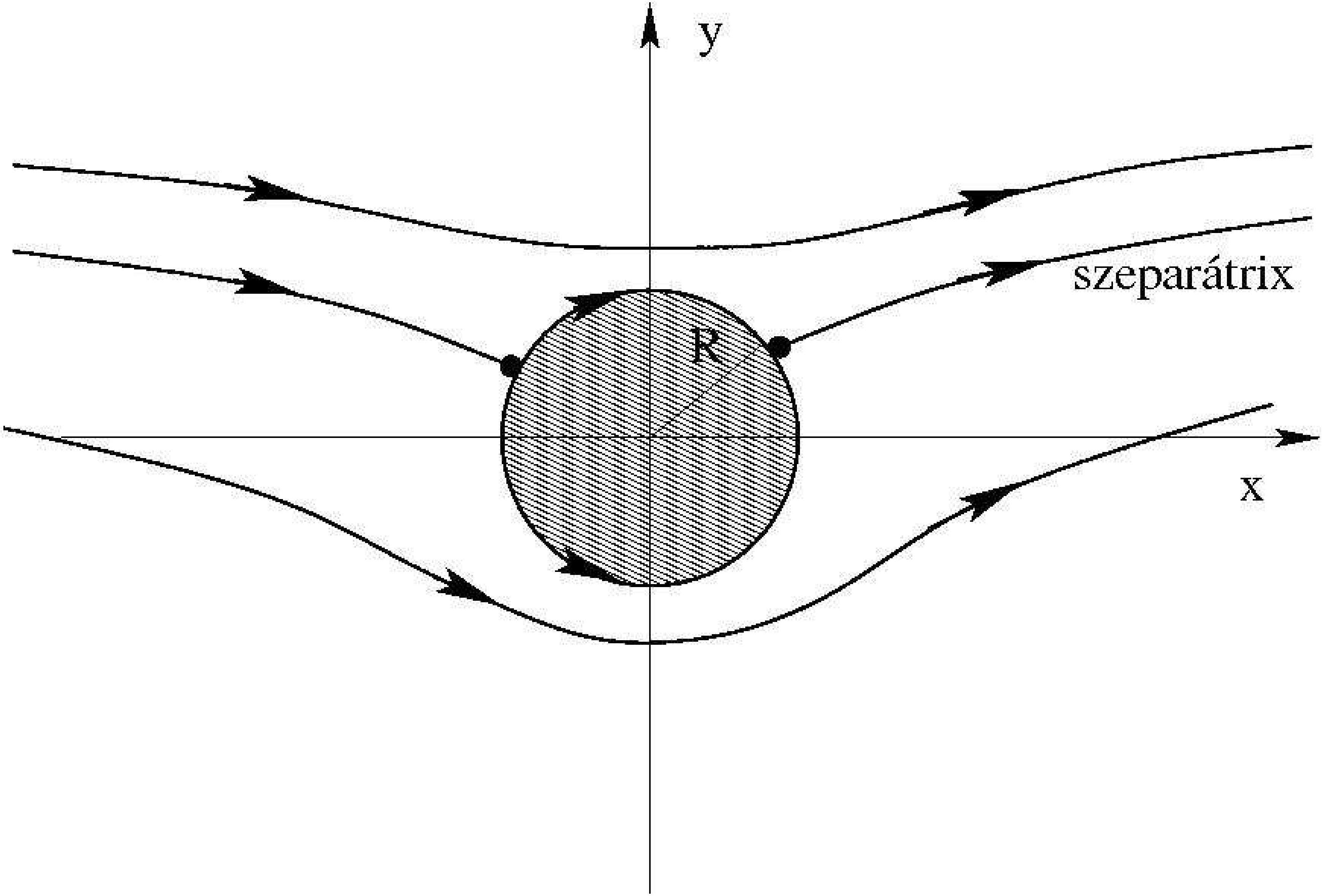
$$\frac{dw}{dz} = v_0 - \frac{v_0 R^2}{z^2} - i\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z} = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - i\frac{\Gamma}{2\pi}z - R^2 = 0$$

$$z_{\pm} = i\frac{\Gamma}{4\pi v_0} \pm \sqrt{R^2 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi v_0}\right)^2}$$

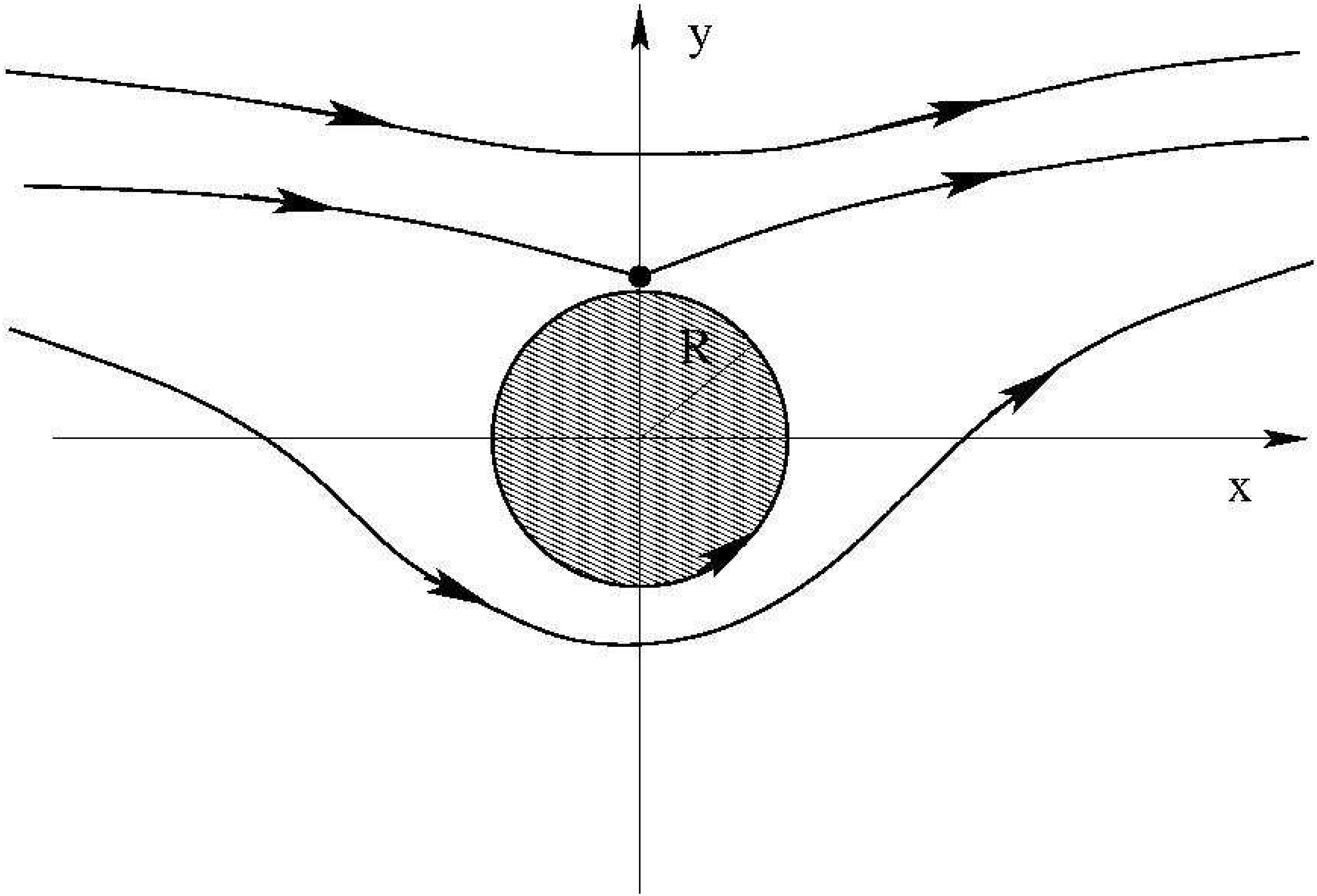
Ha $\Gamma = 0$:



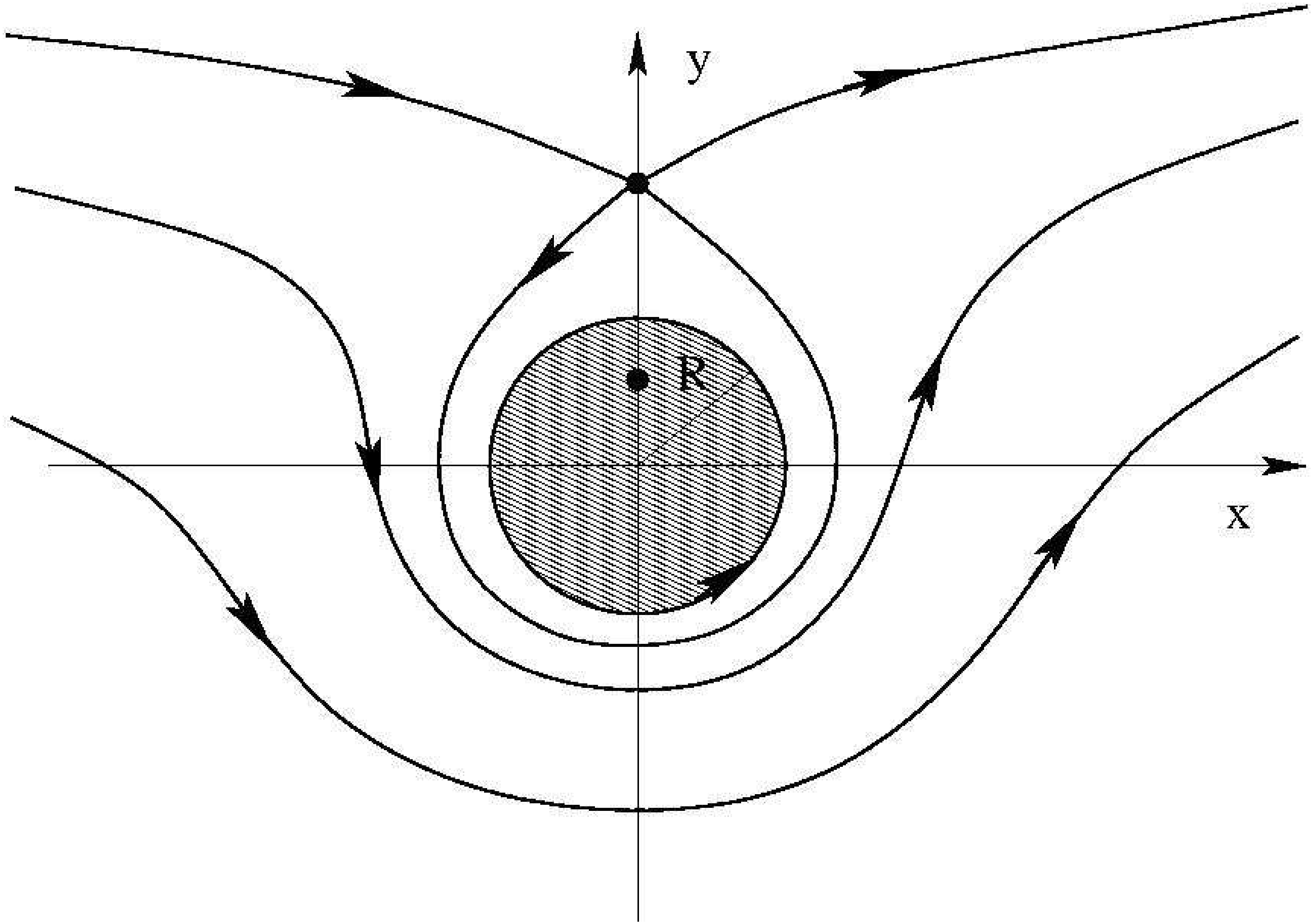
Ha $0 < \Gamma < 4\pi v_0 R$:



Ha $\Gamma = 4\pi v_0 R$:



Ha $\Gamma > 4\pi v_0 R$:



A henger egységnyi hosszára ható erő kiszámítása:
A Bernoulli-egyenletből:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \frac{1}{2}\rho v_0^2 + p_0 = konst. \quad \textbf{mindenütt}$$
$$p = C - \frac{1}{2}\rho v^2$$

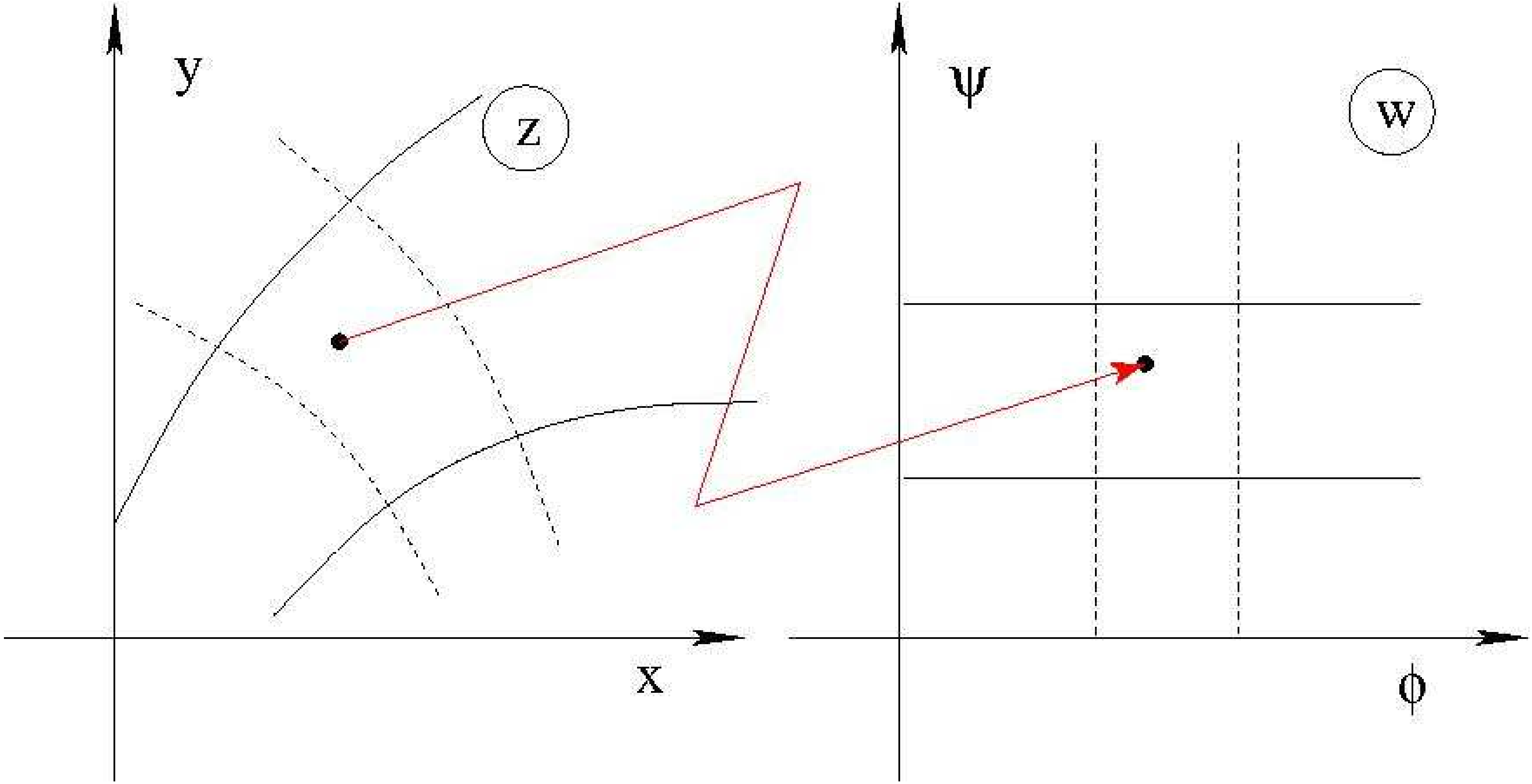
A henger felületén $v^2 = \left(\frac{\Gamma}{2\pi R} - 2v_0 \sin\varphi\right)^2$

$$\mathbf{F} = -\oint p\mathbf{n}ds\ , \quad ds = R\,d\varphi$$

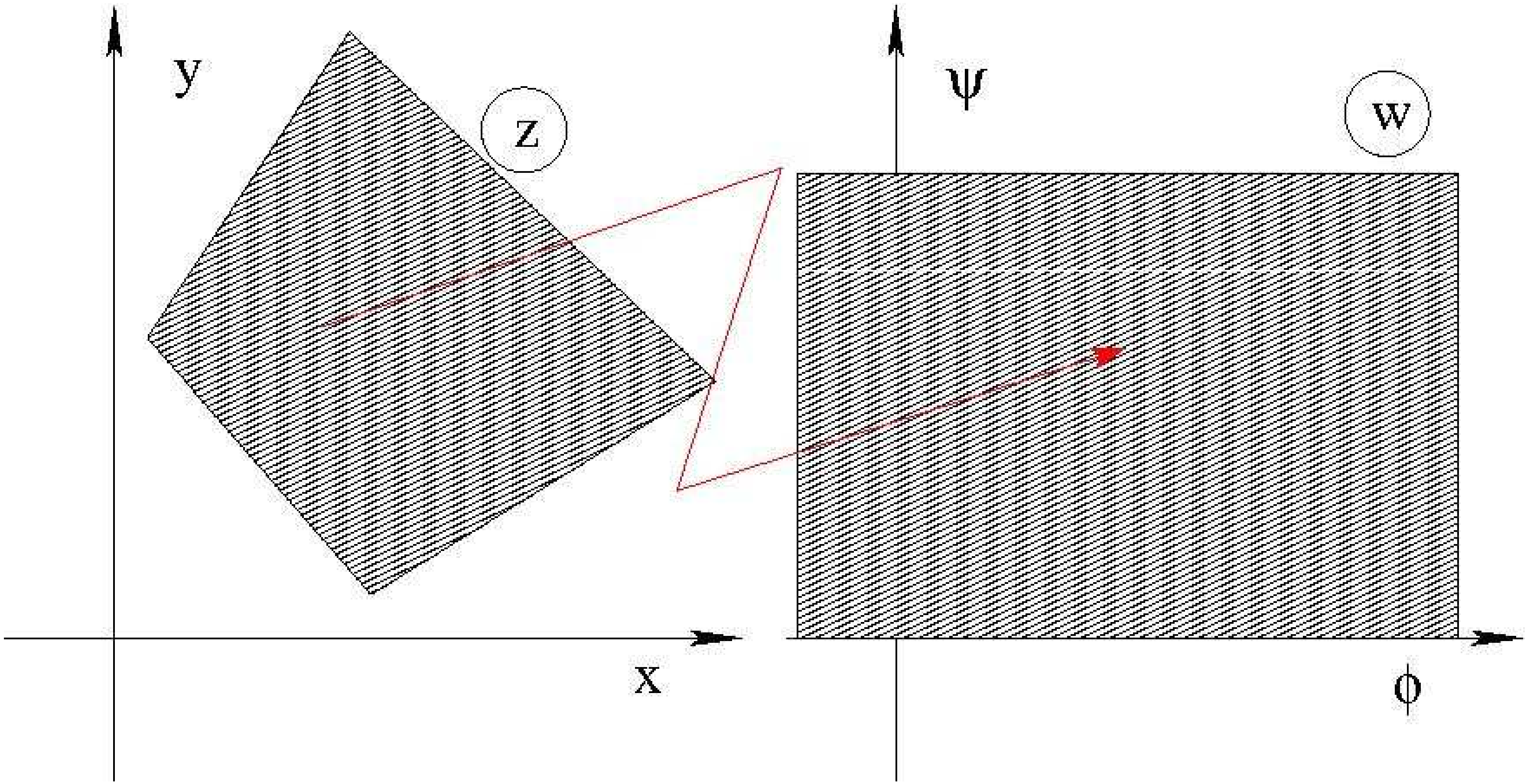
$$F_x = \frac{1}{2}\rho R \int_0^{2\pi} \left(\frac{\Gamma}{2\pi R} - 2v_0 \sin\varphi\right)^2 \cos\varphi\ d\varphi - \int_0^{2\pi} C \cos\varphi\ Rd\varphi = 0$$
$$F_y = \frac{1}{2}\rho R \int_0^{2\pi} \left(\frac{\Gamma}{2\pi R} - 2v_0 \sin\varphi\right)^2 \sin\varphi\ d\varphi - \int_0^{2\pi} C \sin\varphi\ Rd\varphi = -\rho v_0 \Gamma$$

Csak az áramlásra merőleges (felhajtó-) erő hat. A cirkulációt adottnak véve jó egyezés a tapasztalattal. A cirkulációt a súrlódás hozza létre, amit itt elhanyagoltunk.

- Konform leképezések
  Holomorf függvények által létrehozott leképezés: lokálisan nagyító, de szögtartó és az irányítottságot is tartja (ha $f'(z) \neq 0$).
  A komplex potenciál mint leképezés: $w = w(z)$



Ahol az áramlást szilárd, mozdulatlan falak határolják, ott a sebesség tangenciális, tehát a fal valamelyik áramvonallal azonos, ezért ott $\Psi = const.$ Egyszeresen összefüggő tartomány esetén egyetlen áramvonal fut a falak mentén, a konstans pedig nullának választható. Ez azt jelenti, hogy a komplex potenciál az áramlás (x, y) síkban fekvő tartományát a w sík felső félsíkjába képezi:



Next Up Previous
Gyula Bene 2008-02-14