Áramlások fizikája

Bene Gyula
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A

5. Előadás

5.1. Ismétlés

- Hengerre ható erők:

$$F_x = 0$$

$$F_y = -\rho v_0 \Gamma$$

- Konform leképezések:
  - Holomorf komplex függvények, a leképezés szög- és irányítottságtartó.
  - Ha a $w(z)$ leképezés adott tartományt a felső komplex félsíkba képez, akkor $w(z)$ az adott tartományban végbemenő stacionárius örvénymentes áramlás komplex potenciálja.

5.2. Konform leképezések (folytatás)

- Példák
  - Cirkulációs áramlás:

$$w = w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z = \frac{\Gamma\varphi}{2\pi} - i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

  - Áramlás sarokban ill. élnél:

$$w(z) = Az^{\frac{\pi}{\alpha}} = Ar^{\frac{\pi}{\alpha}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{\alpha}\varphi}$$

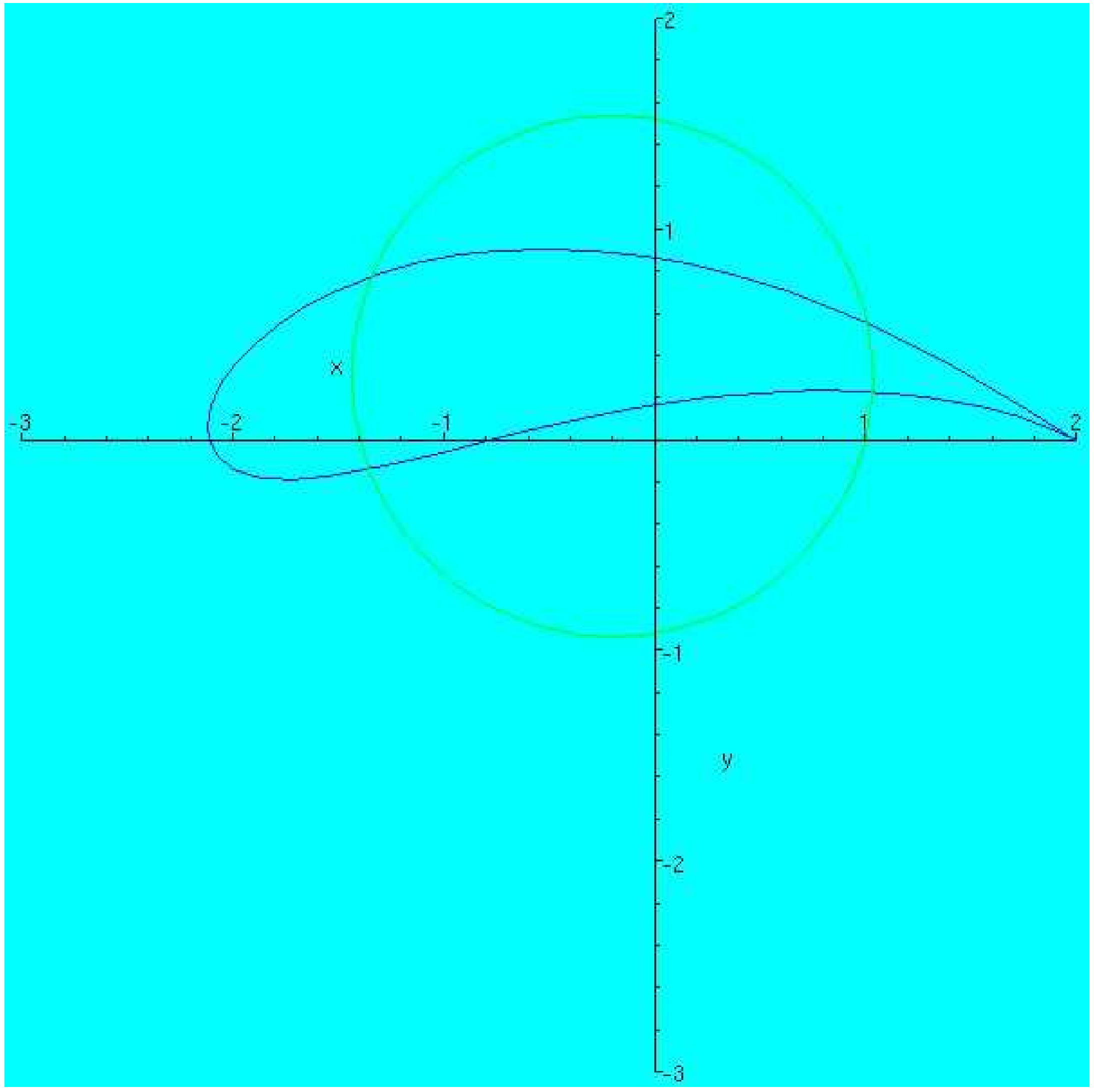
$$\Phi = Ar^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi}{\alpha}\varphi\ , \quad \Psi = Ar^{\frac{\pi}{\alpha}}\sin\frac{\pi}{\alpha}\varphi$$

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\pi}{\alpha} A r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \cos \frac{\pi}{\alpha}\varphi \ , \quad v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\frac{\pi}{\alpha} A r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin \frac{\pi}{\alpha}\varphi$$

sarok: $\frac{\pi}{\alpha} > 1 \ \Rightarrow \ v(0) = 0 \ , \ v(\infty) = \infty$
él: $\frac{\pi}{\alpha} < 1 \ \Rightarrow \ v(0) = \infty \ , \ v(\infty) = 0$

- Áramlás szárnyprofil körül
  Kutta-Zsukovszkij-transzformáció:

$$z = w + \frac{1}{w}$$



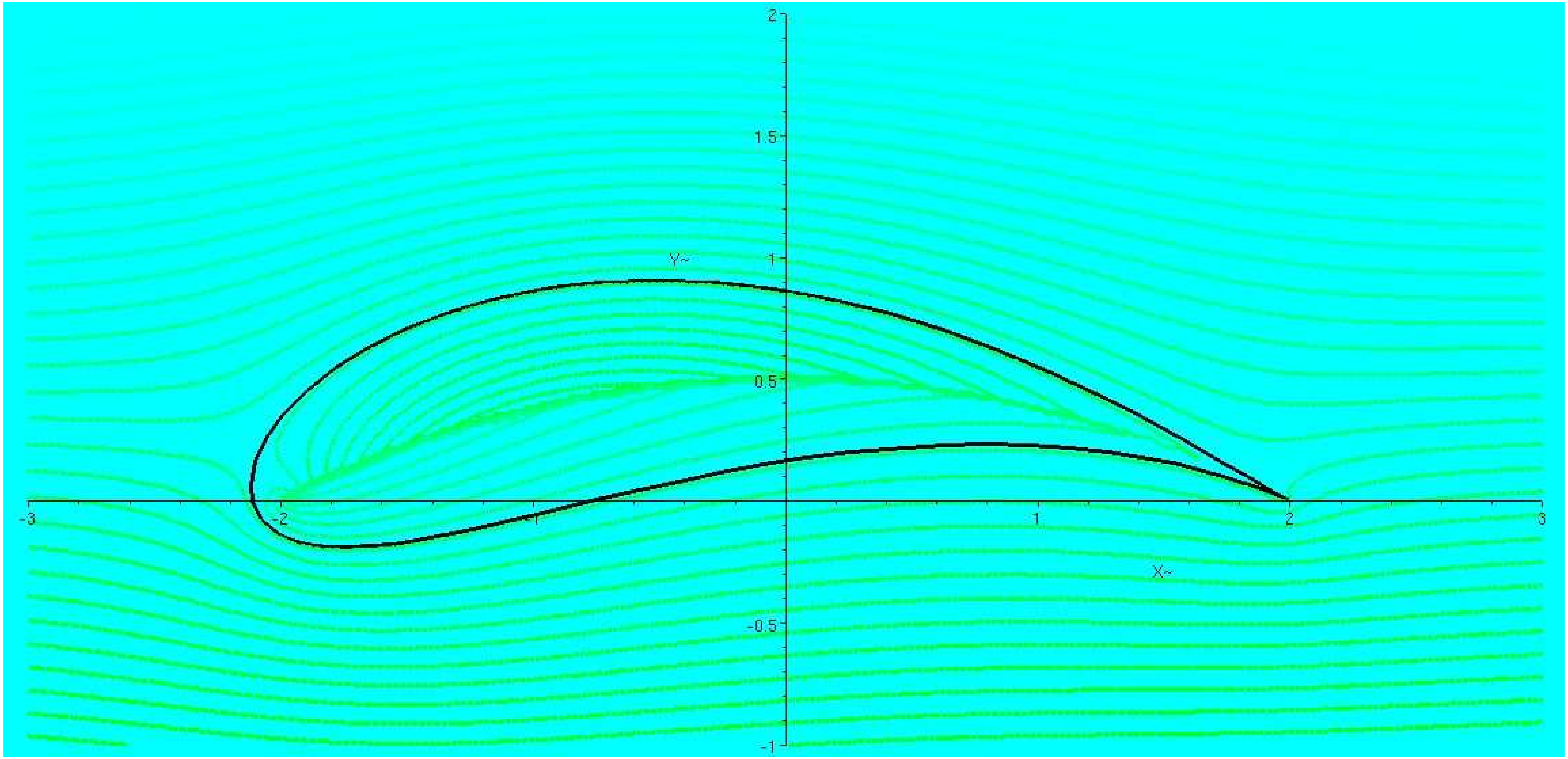
A kört szárnyprofilba transzformálja.
Az inverz transzformált

$$w = -w_0 + \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - 4}\right)$$

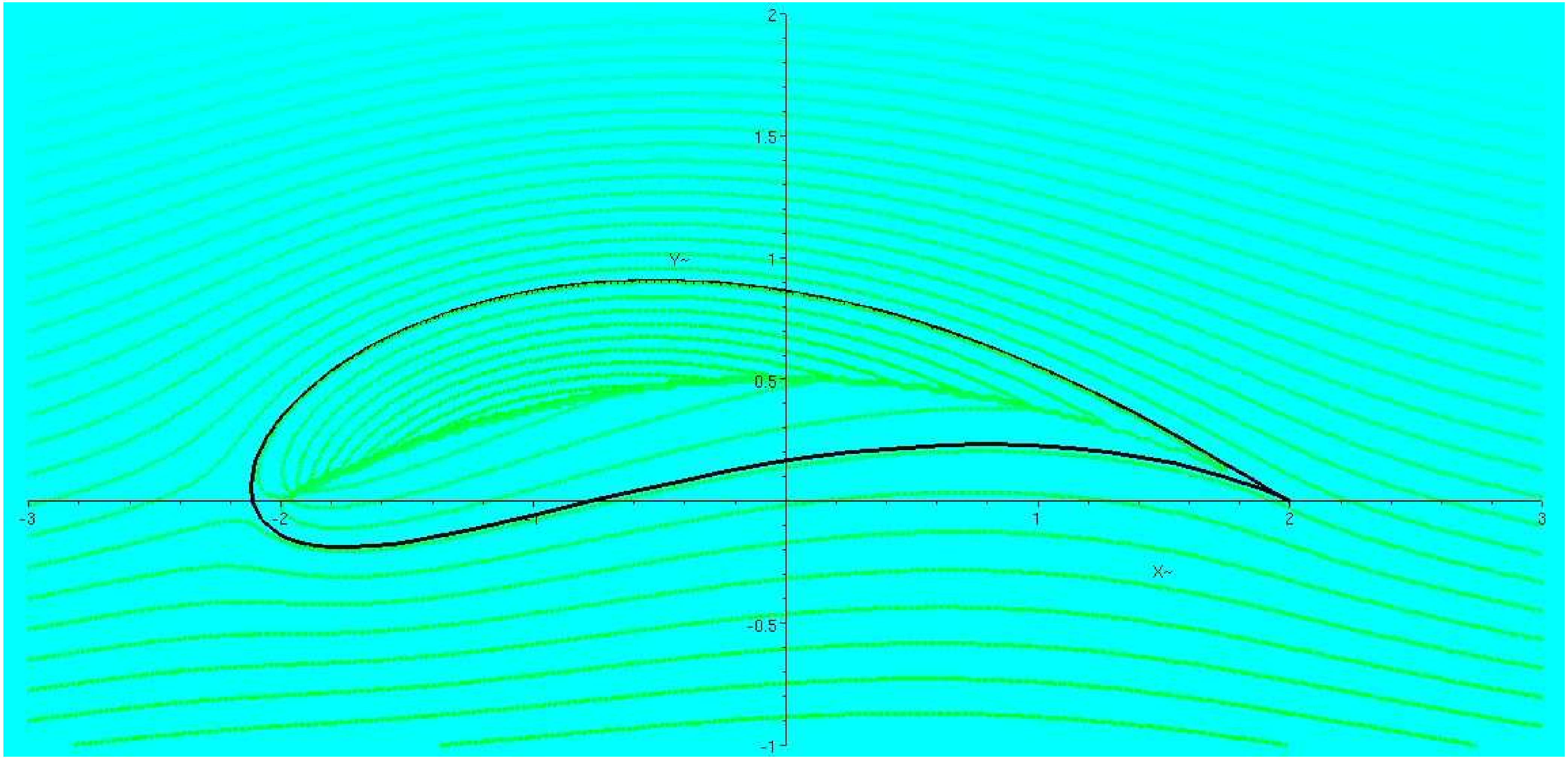
a szárnyprofilt az origó középpontú körbe transzformálja. A kör (henger) körüli áramlás komplex potenciálja ismert, így a szárnyprofil körüli örvénymentes áramlás komplex potenciálja:

$$v_0\left(w+\frac{R^2}{w}\right)-i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln w=v_0\left(-w_0+\frac{1}{2}\left(z+\sqrt{z^2-4}\right)+\frac{R^2}{-w_0+\frac{1}{2}\left(z+\sqrt{z^2-4}\right)}\right)-i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left(-w_0+\frac{1}{2}\left(z+\sqrt{z^2-4}\right)\right)$$

$\Gamma=0$:



$\Gamma<0$:



5.3. Zsukovszkij-tétel

- Tetszőleges keresztmetszetű henger áramló folyadékban
  C görbével határolt keresztmetszet esetén $w(z) = ?$
  potenciál körkeresztmetszet esetén: $F(\zeta) = v_0 \left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\zeta$
  Találjunk olyan konform leképezést, mely a C görbét az R sugarú körbe viszi és $z \to \infty$-re $z = \zeta$ (így lesz mindkét esetben v_0 a beáramlási sebesség). Legyen ez $\zeta = h(z)$. Az új probléma potenciálja ekkor előáll, mint

$$w(z) = F(h(z))$$

  Így a z síkot ζ közbeiktatásával leképeztük a párhuzamos áramlásra.
  $w(z)$ ismeretében a felhajtóerő számolható (Kutta-Zsukovszkij-erő) és

$$F_y = -\rho v_0 \Gamma$$

5.4. Thomson-tétel: a cirkuláció megmaradása

- Cirkuláció időbeli viselkedése
  A cirkulációt adott t pillanatra kiszámítjuk valamilyen zárt C_t görbe mentén, majd a görbét alkotó folyadékrészek mozgását követjük, és kiszámítjuk a cirkulációt az így létrejött C_{t+dt} görbe mentén is:

$$\Gamma_t = \oint_{C_t} \mathbf{v} d\mathbf{s}$$

$$\Gamma_{t+dt} = \oint_{C_{t+dt}} \mathbf{v}' d\mathbf{s}'$$

A $\mathbf{v}'$ és $d\mathbf{s}'$ mennyiségeket a t időpontbeli értékekkel fejezzük ki:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt \; , \quad d\mathbf{s}' = d\mathbf{s} + \underbrace{(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)}_{d\mathbf{v}} dt$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{v}' d\mathbf{s}' = \mathbf{v} d\mathbf{s} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{s} dt + \mathbf{v} d\mathbf{v} dt + \mathcal{O}(dt^2)$$

Integrálva:

$$\Gamma_{t+dt} = \Gamma_t + \left(\oint_{C_t} \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{s} + \oint_{C_t} \mathbf{v} d\mathbf{v} \right) dt$$

A zárójelen belüli második tag eltűnik, mert teljes differenciál integrálja zárt görbe mentén:

$$\oint_{C_t} \mathbf{v} d\mathbf{v} = \frac{1}{2} \oint_{C_t} dv^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\Gamma_t}{dt} = \oint_{C_t} \underbrace{\frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{s} = \oint_{C_t} \mathbf{f} \, d\mathbf{s} - \oint_{C_t} \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} \, p \, d\mathbf{s}}$$

$$\uparrow$$

Euler - egyenlet

Megmaradás: ha a tömegerő konzervatív ($\mathbf{f} = -\mathbf{grad} \; V$) és a folyadék barotróp ($\frac{1}{\rho}\mathbf{grad} \; p = \mathbf{grad} \; P$), akkor

$$\frac{d\Gamma_t}{dt} = 0\ ,$$

azaz a folyadékkal együtt sodródó görbére vonatkozó cirkuláció időben állandó. Ez a Thomson-tétel. Igaz mind örvényes, mind örvénymentes ideális folyadékra.

5.5. Örvényes áramlások

- Az áramlás örvényes, ha van olyan hely az áramlásban, ahol $\mathbf{rot}\mathbf{v} \neq 0$.
- Örvényvektor:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}\mathbf{rot}\mathbf{v}$$

  az adott helyen és időben a folyadék szögsebessége.
- Szemléltetése:
  Örvényvonal: érintője a helyi $\mathbf{\Omega}$ vektor.
  Örvénycső: palástján $\mathbf{\Omega}$ érintőirányú.
- Örvényfluxus:

$$K = \int \mathbf{\Omega} d\mathbf{F} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stokes - tétel}}}{=} \frac{1}{2}\oint_C \mathbf{v} d\mathbf{s} = \frac{1}{2}\Gamma_C$$

Next Up Previous

Gyula Bene 2008-02-14