Next Up Previous

Áramlások fizikája

Bene Gyula
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A

6. Előadás

6.1. Ismétlés

- Példák a konform leképezések alkalmazására: áramlás sarok/él körül, áramlás szárnyprofil körül.
- Zsukovszkij tétele: bármilyen keresztmetszetű hengerre ható felhajtóerő

$$F_y = -\rho v_0 \Gamma$$

- Thomson tétele: az áramlással együtt sodródó görbére vett cirkuláció ideális, barotróp folyadékban, konzervatív tömegerő esetén időben állandó.
- Örvényes áramlás alapfogalmai: örvényvektor, örvényvonal, örvénycső, örvényfluxus

6.2. Örvénytételek

- Az örvénycsőbe zárt örvényfluxus adott időpontban a cső mentén állandó (általánosan érvényes, nem ideális folyadékra is):

$$\mathrm{div}\mathbf{\Omega} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int \mathrm{div}\mathbf{\Omega}\, dV = \underbrace{\int_{\text{palást}} \mathbf{\Omega} d\mathbf{F}}_{=0} + \int_2 \mathbf{\Omega} d\mathbf{F} - \int_1 \mathbf{\Omega} d\mathbf{F} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$K = \int \mathbf{\Omega} d\mathbf{F} = \text{állandó a cső mentén}$$

  Az örvénycső lehet zárt. Ha nem zárt, akkor csak a folyadék határán végződhet.
- A cirkuláció megmaradásából származó örvénytételek (ideális és barotróp folyadék + konzervatív térfogati erő esetén)
  - Az örvénycsőbe zárt örvényfluxus időben sem változik.
    Örvényfonál: olyan vékony cső, hogy benne $\mathbf{\Omega}$ állandó. Az örvényfonalat bárhol és bármely időpontban a $\kappa = \mathbf{\Omega} d\mathbf{F}$ örvényesség (örvényfluxus) jellemzi. Ideális folyadékban minden örvényfonal örvényessége megadandó mint külső paraméter.
  - Ideális folyadékban örvények nem keletkeznek és nem szűnnek meg.
    Ha t_0 időpontban egy folyadéktartományban nincsenek örvények, akkor ott $\mathbf{\Omega} = 0$. Mivel Γ ekkor tetszőleges görbére eltűnik, a megmaradás miatt később is eltűnik, ezért később is fenn kell állnia, hogy $\mathbf{\Omega} = 0$.
  - Örvénycsövet alkotó folyadékrészek később is örvénycsövet alkotnak.
    Bizonyítás: vegyünk fel tetszőleges zárt redukálható görbét az örvénycső palástján. Az erre vett cirkuláció nulla. Későbbi időpontban a folyadékkal együttmozgó görbére a cirkuláció Thomson tétele szerint továbbra is nulla lesz. Mivel ez bármely és tetszőlegesen kicsi görbére is igaz, az örvényvektornak a korábbi örvénycső sodródásával létrejött cső palástján a palásttal párhuzamosnak kell lennie, azaz ez a cső is örvénycső.

Pl.: pipafüst-karika
Füstkarikák 1.
Füstkarikák 2.

6.3. Örvények keletkezése ideális folyadékban

A cirkuláció nem marad meg, ha
- a folyadék nem barotróp (azaz baroklin: kezdetben nincs egyensúly)
- a tömegerő nem konzervatív

- baroklin folyadék (de konzervatív tömegerő)

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\oint \frac{1}{\rho}\text{grad } p \, d\mathbf{s}$$

Ezúttal nem igaz, hogy $\rho = \rho(p)$, amiből következne, hogy a $p =$ állandó (izobár) és a $\rho =$ állandó (izosztér) felületek egybeesnek. Most tehát ezek a felületek metszik egymást.
Pl.

$$\frac{d\Gamma_{ABCD}}{dt} = -\underbrace{\int_A^B \frac{1}{\rho}\text{grad } p \, d\mathbf{s}}_{=0} - \underbrace{\int_B^C \frac{1}{\rho}\text{grad } p \, d\mathbf{s}}_{\frac{p_2-p_1}{\rho_2}} - \underbrace{\int_C^D \frac{1}{\rho}\text{grad } p \, d\mathbf{s}}_{=0} - \underbrace{\int_D^A \frac{1}{\rho}\text{grad } p \, d\mathbf{s}}_{\frac{p_2-p_1}{\rho_1}} = \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)(p_2$$

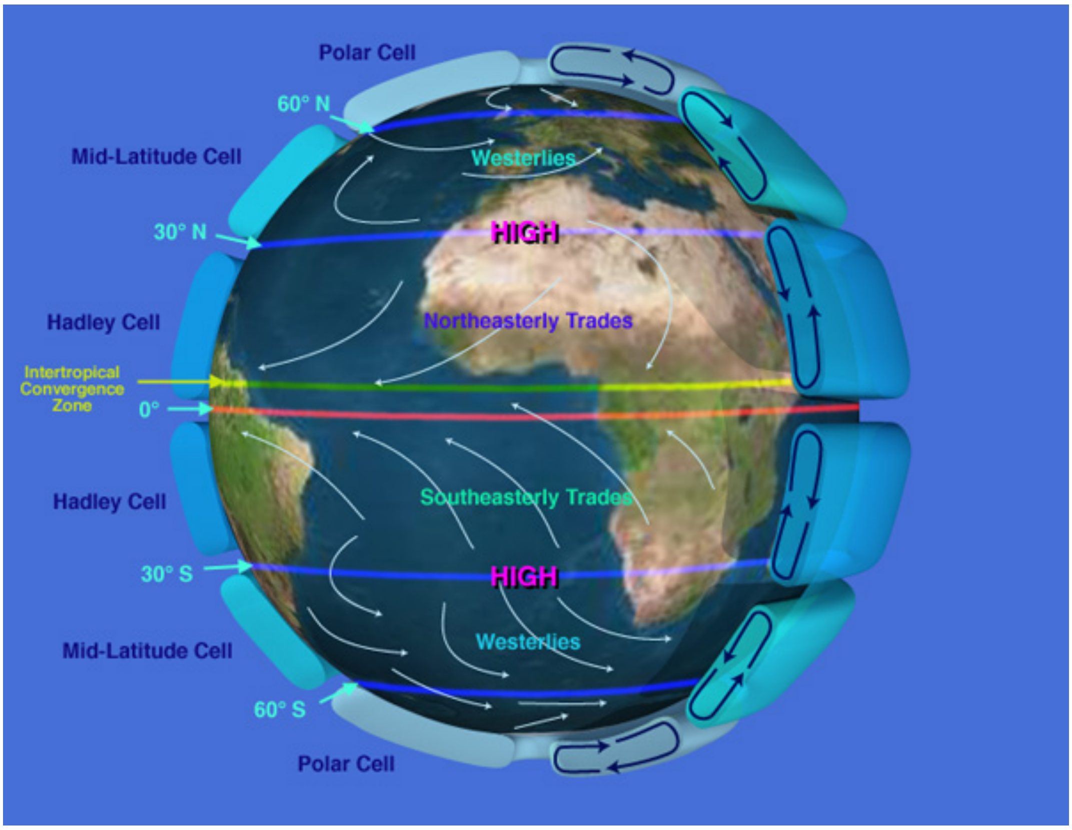
Általában

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_C}{dt} = -\oint \frac{1}{\rho}\text{grad } p \, d\mathbf{s} \quad & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stokes-tétel}}}{=} \quad -\int \text{rot}\left(\frac{1}{\rho}\text{grad } p\right) d\mathbf{F} \\ & = \quad -\int \left(\text{grad } \frac{1}{\rho} \times \text{grad } p\right) d\mathbf{F} \\ & = \quad \int \frac{\text{grad } \rho \times \text{grad } p}{\rho^2} d\mathbf{F} \\ & = \quad \int \mathbf{B} d\mathbf{F} \end{aligned}$$

$\mathbf{B} = \frac{\text{grad } \rho \times \text{grad } p}{\rho^2}$: baroklin vektor.

Alkalmazások

- Nyugalomban levő légkörben nagy kiterjedésű felmelegedés lokálisan $\rightarrow$ nincs termodinamikai egyensúly, $s =$ állandó $\rightarrow$ baroklin.
  $\Downarrow$
  Áramlás indul meg, ami általában örvényes lesz.
  - Egyenlítői erősebb felmelegedés $\rightarrow$ passzát (északi féltekén) - antipasszát



- Óceán és szárazföld különböző mértékű felmelegedése télen és nyáron: monszun (évszakonként változó)
- Szárazföld és víz különböző mértékű felmelegedése ill. lehűlése nappal és éjjel
- Egyenlítői ciklonok: helyi felmelegedés (anticiklon: helyi lehűlés)

- Tengeri áramlás a sókoncentráció-különbség hatására
  ρ növekszik a sótartalommal: alul áramlik a sósabb víz, felül a kevésbé sós
  - Áramlás Gibraltárnál: a Földközi-tenger sósabb, mint az Atlanti-óceán

  - Áramlás a Boszporusznál: a Földközi-tenger sósabb, mint a Fekete-tenger

- Nemkonzervatív erő (ugyanakkor barotróp folyadék)
  A legtipikusabb eset: Coriolis-erő
  Áramlás forgó koordináta-rendszerben
  Az Euler-egyenlet:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathrm{grad}\ V - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\ p \quad \underbrace{-\mathrm{grad}\ \frac{\Omega_0^2 R^2}{2}}_{\text{centrifugális gyorsulás}} \quad \underbrace{-2\,(\mathbf{\Omega_0} \times \mathbf{v})}_{\text{Coriolis-gyorsulás}}$$

  Bernoulli-egyenlet:

$$\mathbf{v}\,\mathrm{grad}\left(\frac{v^2}{2} + V - \frac{1}{2}\Omega_0^2 R^2 + w\right) = 0$$

  A cirkuláció egyenlete:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -2\oint (\mathbf{\Omega_0} \times \mathbf{v})\, d\mathbf{s}$$

  Szemléletes jelentése:
  Legyen C jobbkéz-körüljárású. Ekkor

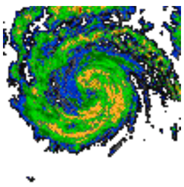
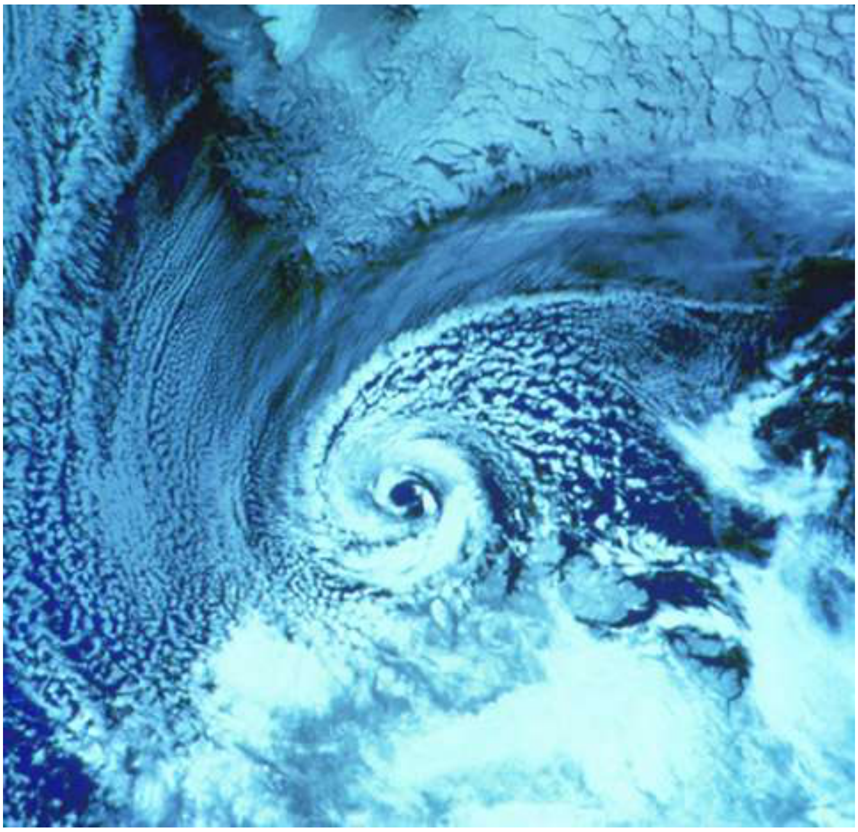
$$\oint_C (\mathbf{\Omega_0} \times \mathbf{v})\, d\mathbf{s} = \mathbf{\Omega_0} \oint_C (\mathbf{v} \times d\mathbf{s}) = \mathbf{\Omega_0} \oint_{C_\perp} (\mathbf{v}_\perp \times d\mathbf{s}_\perp)$$

  mivel $\mathbf{v}_\perp \times d\mathbf{s}_\perp$ a $\mathbf{v} \times d\mathbf{s}$ vektornak az $\mathbf{\Omega_0}$-lal párhuzamos komponense.
  $dt\,|\mathbf{v}_\perp \times d\mathbf{s}_\perp|$ a paralelogramma területe

$|\oint(\mathbf{v}_\perp \times d\mathbf{s}_\perp)|$ a területváltozás $C_\perp^{t+dt}$ és $C_\perp^t$ között egységnyi idő alatt.

$$\oint (\mathbf{\Omega_0} \times \mathbf{v})\, d\mathbf{s} = \Omega_0 \frac{d\Sigma}{dt} \ ,$$

ahol Σ a $C_\perp$ által körbezárt terület.
Passzát: A C görbe az egyenlítő irányába mozog, $\frac{d\Sigma}{dt} < 0$, így Γ_C növekszik $\Rightarrow$ erősödő áramlás keletről. (Antipasszát ugyanígy)
Ciklon: az alsó légtömegek a mag felé áramlanak, $\frac{d\Sigma}{dt} < 0$, így Γ_C növekszik: balra csavarodó áramvonalak. Ez összhangban van azzal, hogy a $2\mathbf{v} \times \omega$ Coriolis-erő az északi féltekén jobbra, a déli féltekén balra térít el.

- Általános esetben mindkét oka megvan a cirkuláció megváltozásának.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -2 \oint (\mathbf{\Omega_0} \times \mathbf{v})\, d\mathbf{s} + \int \mathbf{B} d\mathbf{F}$$

Next Up Previous

Gyula Bene 2008-02-14