Áramlások fizikája

Bene Gyula
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A

7. Előadás

7.1. Ismétlés

- Örvénytételek
  - Általánosan érvényes: az örvénycsőbe zárt örvényfluxus adott időpontban a cső mentén állandó

$$K = \int \mathbf{\Omega} d\mathbf{F} = \text{állandó a cső mentén}$$

  - Ideális, barotróp folyadékra konzervatív erőtér esetén érvényes örvénytételek:
    - Az örvénycsőbe zárt örvényfluxus időben sem változik.
    - Ideális folyadékban örvények nem keletkeznek és nem szűnnek meg.
    - Örvénycsövet alkotó folyadékrészek később is örvénycsövet alkotnak.
- Örvények keletkezése ideális folyadékban
  Oka: baroklin (nem barotróp) folyadék és/vagy nem konzervatív erőtér (Coriolis erő)

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = \int \mathbf{B} d\mathbf{F} - 2\Omega_0 \frac{d\Sigma}{dt}$$

  Itt

$$\mathbf{B} = \frac{\text{grad } \rho \times \text{grad } p}{\rho^2}$$

  a baroklin vektor, $\mathbf{\Sigma}$ pedig a C görbének a $\mathbf{\Omega}_0$ szögsebesség-vektorra merőleges vetülete által határolt terület.

- Alkalmazások:
  - Helyi felmelegedés okozta örvények (Hadley-cellák, monszun)
  - Sókoncentráció-különbség okozta örvényesség (Gibraltár, Boszporusz)
  - A Föld forgása miatt fellépő örvényesség (passzátszél, ciklonok)

7.2. Örvényes áramlás összenyomhatatlan folyadékban

- $\rho =$ konst. $\Rightarrow$ barotróp folyadék. Ha még az erőtér is konzervatív, megmarad a cirkuláció. Az örvénycsövek időben állandó örvényfluxusukkal jellemezhetők.

A feladat: $\mathbf{\Omega}$ adott, $\mathbf{v}=?$

- Egyenletek:

$$\text{div}\ \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{1}{2}\text{rot}\ \mathbf{v} = \mathbf{\Omega}$$

- analógia a megnetosztatikával (kvázistacionárius áramok mágneses tere):

$$\text{div}\ \mathbf{B} = 0$$

$$\text{rot}\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

- Integrális alak:

$$\oint \mathbf{v}\ d\mathbf{s} = 2\kappa \equiv 2\int \mathbf{\Omega}\ d\mathbf{F}$$

magnetosztatikai megfelelője:

$$\oint \mathbf{B}\ d\mathbf{s} = \mu_0 I = \mu_0 \int \mathbf{j}\ d\mathbf{F}$$

- Általános megoldás:
vektorpotenciál:

$$\mathbf{v} = \text{rot}\ \mathbf{A}$$

kiegészítő feltétel:

$$\text{div}\ \mathbf{A} = 0$$

Ekkor

$$\text{rot}\ \mathbf{v} = \text{rot rot}\ \mathbf{A} = \text{drad div}\ \mathbf{A} - \triangle\ \mathbf{A} = -\triangle\ \mathbf{A}$$

Ezzel a következő Poisson-egyenlethez jutunk:

$$\triangle\, \mathbf{A} = -2\mathbf{\Omega}$$

Ha $\mathbf{\Omega}$ a végtelenben eltűnik, akkor a megoldás

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{2\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'$$

- Örvényfonal körül:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa}{2\pi}\int \frac{d\mathbf{s}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

  Ebből a sebességtér:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa}{2\pi}\int \frac{d\mathbf{s}' \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

  mint a magnetosztatikai Biot-Savart-törvény.
- Alkalmazások
  - Végtelen hosszú, egyenes örvényfonál
    Kívül: örvénymentes áramlás
    Az áramvonalak koncentrikus körök

$$\oint \mathbf{v}d\mathbf{s} = v_\varphi 2\pi r = 2\kappa \quad \Rightarrow \quad v_\varphi = \frac{\kappa}{\pi}\frac{1}{r}\ ,\ v_r = 0$$

    Síkbeli áramlás, az $r = 0$ vonaltól eltekintve örvénymentes.
    Komplex potenciál:

$$w = \frac{\kappa}{\pi i}\ln z$$

$$\kappa = \Gamma/2$$

    Komplex sebesség:

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y = \frac{\kappa}{\pi i}\frac{1}{z}$$

$r \to 0$-ra nem értelmes, viszont véges vastagságú örvénycső sebességtere is ilyen az örvénycsövön kívül.
Ha az örvényfonál a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban van:

$$w = \frac{\kappa}{\pi i}\ln(z - z_0)$$

- Két párhuzamos, egyenes örvényfonál

$$w = \frac{\kappa_1}{\pi i}\ln(z - z_1) + \frac{\kappa_2}{\pi i}\ln(z - z_2)$$

Az örvényfonál a folyadékkal együtt mozog (örvénytétel) $\Rightarrow$ az adott örvény helyváltozását a többi örvényfonál sebességtere határozza meg.

- Két örvény mozgása

$$\frac{dx_1}{dt} - i\frac{dy_1}{dt} \equiv \frac{dz_1^*}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sodródás}}}{=} \frac{\kappa_2}{\pi i}\frac{1}{z_1 - z_2} \quad \text{és} \quad \frac{dz_2^*}{dt} = \frac{\kappa_1}{\pi i}\frac{1}{z_2 - z_1}$$

$$\Downarrow$$

$$\kappa_1\frac{dz_1^*}{dt} + \kappa_2\frac{dz_2^*}{dt} = 0 \text{ , azaz } \quad \kappa_1 z_1^* + \kappa_2 z_2^* = \text{állandó}$$

Mivel κ_1 és κ_2 valós,

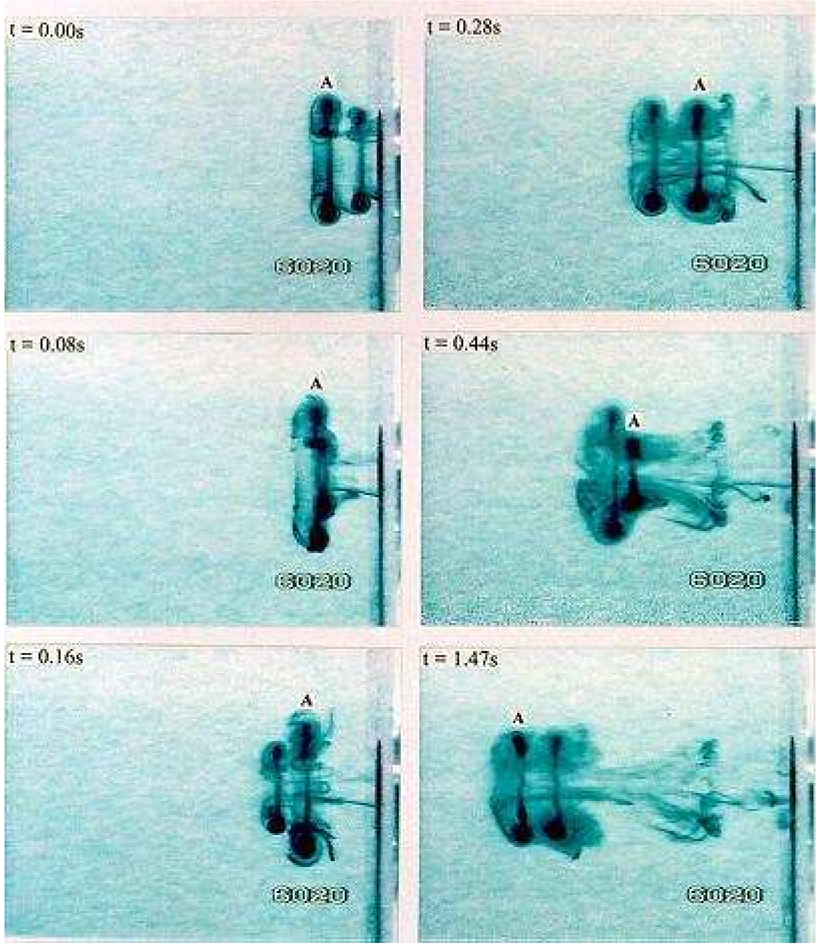
$$\kappa_1 z_1 + \kappa_2 z_2 = \text{állandó} = (\kappa_1 + \kappa_2) z_c$$

z_c: örvényközéppont, analóg a tömegközépponttal. (Csak akkor értelmezzük, ha $\kappa_1 \neq -\kappa_2$.)
Az örvényközéppont nyugalomban van. A két örvény a középpont körül körmozgást végez:

$$v_{x1} = \frac{\kappa_2}{\pi}\frac{y_2 - y_1}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$v_{y1} = -\frac{\kappa_2}{\pi}\frac{x_2 - x_1}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ugyanis, mint látható, a sebesség merőleges az örvényeket összekötő $\mathbf{r} = (x_2 - x1, y_2 - y_1)$ szakaszra.
Ha $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$, az örvényközéppont a végtelenben van, az örvénypár pedig egyenesvonalú egyenes mozgást végez az őket összekötő szakaszra merőleges irányban.
- Négy örvény mozgása
- Örvénygyűrűk
  Füstkarika



Füstkarikák
Két örvénygyűrű ütközése

- Örvénysor (örvénylánc)
  Tekintsük a következő komplex potenciált:

$$w = \frac{\kappa}{\pi i} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{l} z\right)\right)$$

Ha $z \to nl$, $\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$

$$w = \frac{\kappa}{\pi i} \ln \underbrace{\left[\sin\left(\pi n + \frac{\pi}{l}(z - nl)\right)\right]}_{(-1)^n \sin \frac{\pi}{l}(z-nl) \approx (-1)^n \frac{\pi}{l}(z-nl)} \to \frac{\kappa}{\pi i} \ln(z - nl) + \text{konst.}$$

Ez örvényfonál a $z_n = nl$ ponrban κ örvényfluxussal.
w örvénysort ír le.
A komplex sebesség

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\kappa}{li}\text{ctg}\left(\frac{\pi}{l}z\right) = \frac{\kappa}{l}\,\frac{-\text{ctg}\left(\frac{\pi}{l}x\right)\text{cth}\left(\frac{\pi}{l}y\right) + i}{\text{ctg}\left(\frac{\pi}{l}x\right) - i\text{cth}\left(\frac{\pi}{l}y\right)} = \underbrace{-\frac{\kappa}{l}\,\frac{\text{cth}\left(\frac{\pi}{l}y\right)\left(1 + \text{ctg}^2\left(\frac{\pi}{l}x\right)\right)}{\text{ctg}^2\left(\frac{\pi}{l}x\right) + \text{cth}^2\left(\frac{\pi}{l}y\right)}}_{v_x} - i\underbrace{\frac{\kappa}{l}\,\frac{\text{ctg}\left(\frac{\pi}{l}x\right)\left(\text{cth}^2\left(\frac{\pi}{l}y\right) - 1\right)}{\text{ctg}^2\left(\frac{\pi}{l}x\right) + \text{cth}^2\left(\frac{\pi}{l}y\right)}}_{v_y}$$

$y = 0$-ra $v_x = 0$, tehát az örvénysor nem mozog, stacionárius alakzat (de nem stabil).
Áramlási függvény:

$$\Psi = -\frac{\kappa}{\pi}\text{Re}\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{l}z\right)\right) = -\frac{\kappa}{\pi}\ln\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right)\text{ch}^2\left(\frac{\pi}{l}y\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{l}x\right)\text{sh}^2\left(\frac{\pi}{l}y\right)\right]^{1/2} = -\frac{\kappa}{2\pi}\ln\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right) + \text{sh}^2\left(\frac{\pi}{l}y\right)\right]$$

Áramvonalak:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right) + \text{sh}^2\left(\frac{\pi}{l}y\right) = C$$

Zártak, amíg $C < 1$
Nyitottak, ha $C > 1$
A határgörbe (szeparátrix): $C = 1$

$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)\right| = \left|\text{sh}\left(\frac{\pi}{l}y\right)\right|$$

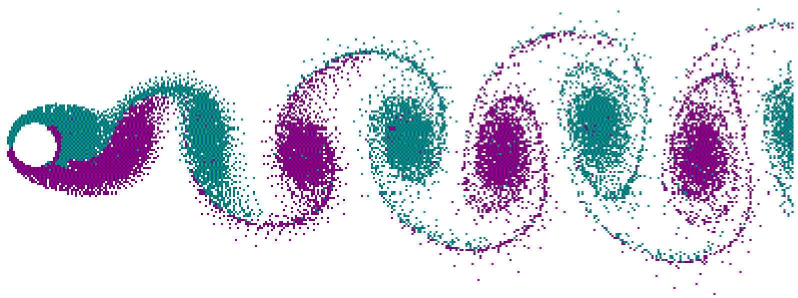
Az örvénysortól végtelen távol a sebesség x irányú és

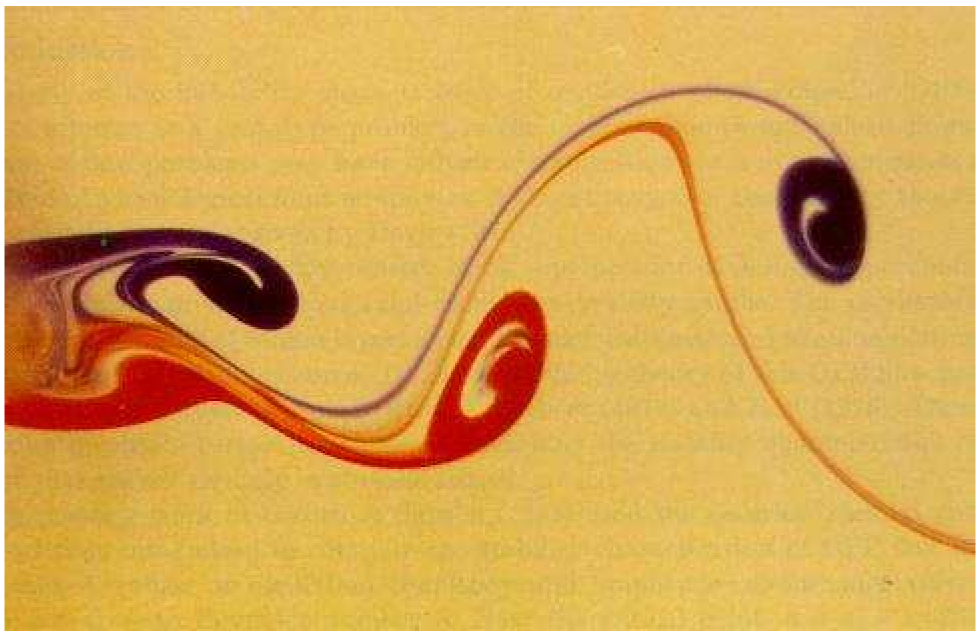
$$v_x(y = \pm\infty) = \mp\frac{\kappa}{l}$$

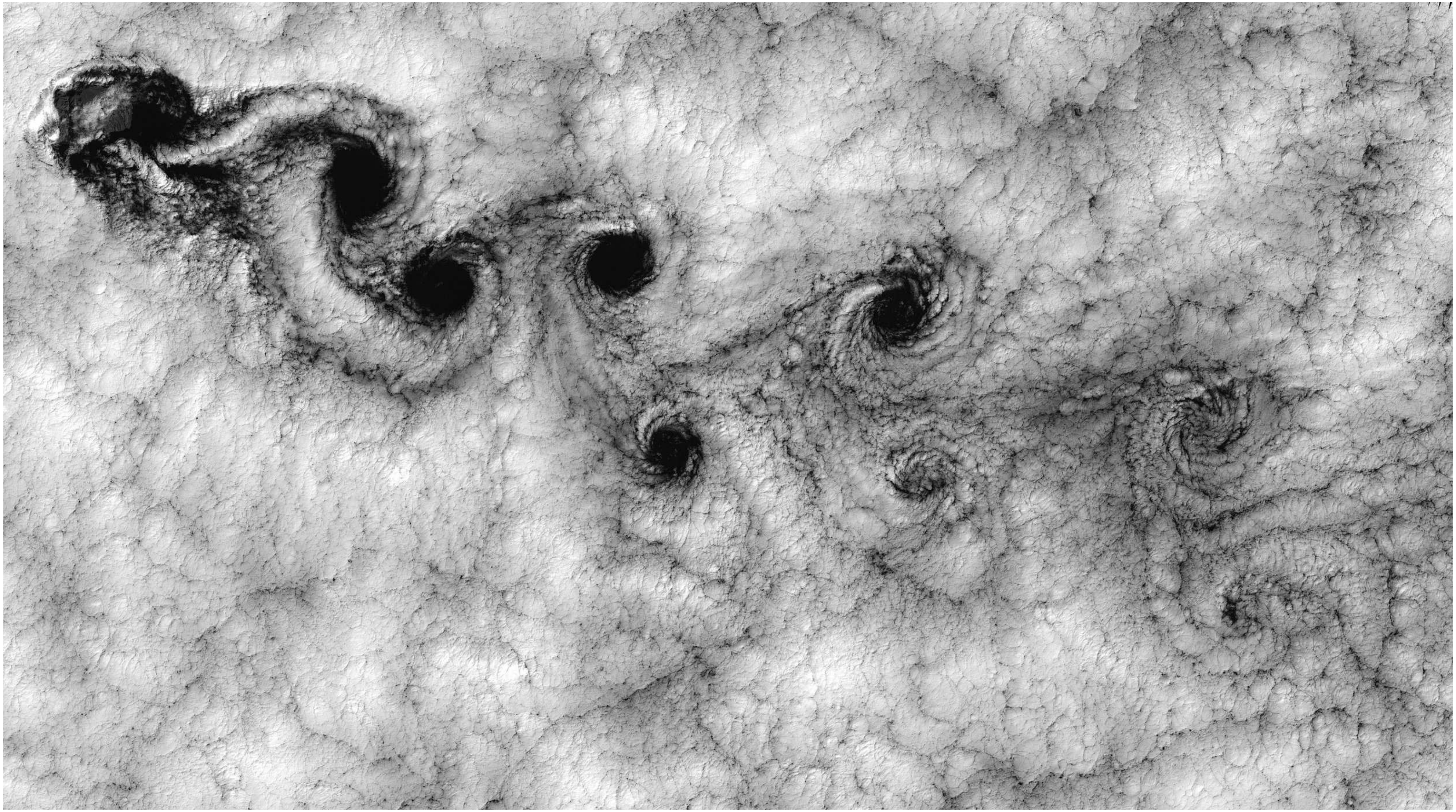
- Kármán-féle örvényút
  Két $l/2$-vel eltolt, ellenkező irányban forgó örvénysor.
  Önmagában egyik örvénylánc sem mozogna. Együtt $-x$ irányban eltolódik mindkettő. A sebesség

$$v = -\frac{\kappa}{l}\mathrm{th}\left(\frac{\pi}{l}c\right)$$

  ahol c a két örvénylánc távolsága.
  Hasonló alakzat képződik a folyadékban mozgó tárgyak mögött. Van olyan c/l arány, melyre az örvényút stabil.







- Örvényréteg
  Az örvényeket sűrítjük egy egyenes mentén (x-tengely), $l \to 0$ úgy, hogy az egységnyi hosszra es örvényesség állandó legyen: $\kappa/l =$ konst..
  Sebességtér: integrális alak:

$$\oint \mathbf{v} d\mathbf{s} = 2\kappa$$

  $\mathbf{v}$ párhuzamos az egyenessel, emiatt

$$2Lv = 2\frac{\kappa}{l}L \quad \to \quad v = \frac{\kappa}{l}$$

  Az örvényréteg érintőleges szakadási felületet képez (az sebesség az örvényrétegen átlépve előjelet vált). Nem stabil. V.ö.: ciklon keletkezés.

Gyula Bene 2008-02-14