Áramlások fizikája

Bene Gyula
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A

8. Előadás

8.1. Ismétlés

Örvényes áramlás összenyomhatatlan folyadékban

- Örvényfonál sebességtere:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{s}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

- Végtelen, egyenes örvényfonál
- Két örvényfonál mozgása
- Négy örvényfonál mozgása
- Örvénysor sebességtere
- Két, párhuzamos örvénysor mozgása: Kármán-féle örvényút
- Örvényréteg sebességtere

8.2. Hullámok ideális folyadékban. Hanghullámok

Összenyomható folyadék. Egyensúlyban ρ_0, p_0 jellemzik (termikus egyensúly).
Olyan mozgásokat vizsgálunk, melyekre $\mathbf{f} = 0$ és $\mathbf{v}$, $\rho' = \rho - \rho_0$, $p' = p - p_0$ mindegyike kicsi (kis rezgés).

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\mathbf{v})=0 \\ &\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\mathrm{grad})\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p \\ &\frac{\partial s}{\partial t}+(\mathbf{v}\mathrm{grad})s=0 \end{aligned} \qquad \text{kis változások} \Rightarrow \begin{aligned} &\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\rho_0\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0 \\ &\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}\,p' \\ &\frac{\partial s}{\partial t}=0 \end{aligned}$$

Lineáris egyenletek.
Az entrópiasűrűség (s) mindenütt állandó, ezért egyértelmű kapcsolat van p' és ρ' között:

$$p'=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s\rho' \qquad \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s=-\frac{m}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s=\frac{m}{V}\kappa_s=\rho_0\kappa_s>0$$

Itt $\kappa_s=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s$ az adiabatikus kompresszibilitás.
ρ' és $\mathbf{v}$ egyenletéből

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}+\rho_0\mathrm{div}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}-\triangle p'=\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s\triangle\rho'=0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}-c^2\triangle\rho'=0\;, \quad c^2=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s=\frac{1}{\rho_0\kappa_s}$$

0 °C-on

- levegőben $c=331\frac{m}{s}$
- vízben $c=1441\frac{m}{s}$

	20 Hz		16 kHz	
infrahang	|	hallható hang	|	ultrahang

A sűrűség- és nyomásingadozás egyaránt kielégíti a hullámegyenletet.
Az Euler-egyenlet $\mathbf{v}$ és p'-re olyan, mint örvénymentes áramlásra:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}\,p' \quad\to\quad \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\mathbf{v}=0$$

Mivel kezdetben rot $\mathbf{v}=0$, később is rot $\mathbf{v}=0$.

$$\mathbf{v} = \text{grad}\ \boldsymbol{\Phi}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\text{grad}\ p' = \text{grad}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t} + \frac{p'}{\rho_0}\right) = 0$$

Az integrációs konstanst $\boldsymbol{\Phi}$-be beolvasztva

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}\frac{\partial p'}{\partial t} = -\frac{\rho_0}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial t^2} = -\rho_0 \text{div}\ \mathbf{v} = -\rho_0 \triangle \boldsymbol{\Phi}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial t^2} - c^2 \triangle \boldsymbol{\Phi} = 0$$

Ebből az következik (az egyenlet gradiensét véve), hogy minden sebességkomponens is ugyanazt a hullámegyenletet elégíti ki:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - c^2 \triangle \mathbf{v} = 0$$

A hang tehát sűrűség-, nyomás-, sebesség-hullám, sőt, mivel $T' = T - T_0 = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s p'$, hőmérséklet-hullám is.

Síkhullámok. A $+x$ irányban haladó hullám

$$\boldsymbol{\Phi} = f(x - ct)$$

Itt f tetszőleges egyváltozós függvény.

$$v_x = f'(x - ct)\ , \quad v_y = v_z = 0$$

Longitudinális hullám.

$$p' = \rho_0 c f'(x - ct)\ , \quad \rho' = \frac{\rho_0}{c} f'(x - ct)\ , \quad p' = c^2 \rho'$$

A linearizálás feltétele: $\frac{v_x}{c} = \frac{\rho'}{\rho_0} \ll 1$.
Monokromatikus síkhullám:

$$\Phi = \mathrm{Re}\left(A e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right) \ , \quad \mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$$

Itt $\mathbf{n}$ a terjedési irány, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ a hullámszám, λ a hullámhossz, $\omega = 2\pi\nu$ a körfrekvencia, ν a frekvencia.

$$c = \nu\lambda \ , \quad \omega = kc$$

Ezek az összefüggések csak nyugvó közegben érvényesek.

8.3. Hangterjedés mozgó közegben

K koordinátarendszer: homogén folyadékáramlás $\mathbf{u}$ sebességgel.
K' koordinátarendszer: a folyadék nyugalomban van

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}t + \mathbf{r}'$$

Zavar: a közeget az egyensúlyból kimozdító fizikai hatás, pl. nyomásváltozás.

- A K' rendszerben a zavar minden irányban c sebességgel terjed. A K rendszerben a zavar terjedési sebessége $\mathbf{n}$ irányban

$$\mathbf{u} + c\mathbf{n}$$

  Az áramlás elsodorja a zavart.
- Az O pontban keltett zavar által elérhető tartomány egységnyi idő alatt:
  $u < c$: Gömb belseje
  $u > c$: 2α nyílásszögű kúp belseje, ahol $\sin\alpha = \frac{c}{u}$ a Mach-szám.
- Doppler-jelenség:
  A K'rendszerben:

$$\Phi = A e^{i(\mathbf{kr}'-\omega' t)} \ , \ \omega' = ck$$

  A K rendszerben:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t \ , \quad \Phi = A\mathrm{e}^{i(\mathbf{kr}' - \omega' t)} = A\mathrm{e}^{i(\mathbf{kr} - (\omega' + \mathbf{ku})t)} \ , \ \omega = \omega' + \mathbf{ku} = \omega' \left(1 + \frac{\mathbf{un}}{c}\right) = \omega' \left(1 + \frac{u}{c}\cos\theta\right)$$

A felénk fújt hang magasabb ($\cos\theta = 1$), a tőlünk fújt hang mélyebb ($\cos\theta = -1$).

8.4. Mozgó hangforrás nyugvó közegben

A forrás $\mathbf{u}$ sebességgel mozog.
A kibocsátott hang által elért tartomány szuperszónikus mozgás esetén 2α nyílásszögű kúp belseje. A forrással együttmozgó K' rendszerben a folyadék $-\mathbf{u}$ sebességgel mozog. A frekvencia itt ω_0. Az álló K rendszerben izotróp a hangterjedés (mivel a folyadék nyugalomban van), de nem ω_0 a frekvencia.

A K'rendszerben:

$$\Phi = A\mathrm{e}^{i(\mathbf{kr}' - \omega_0 t)}$$

A K rendszerben:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t \ , \quad \Phi = A\mathrm{e}^{i(\mathbf{kr}' - \omega_0 t)} = A\mathrm{e}^{i(\mathbf{kr} - (\omega_0 + \mathbf{ku})t)} = A\mathrm{e}^{i(\mathbf{kr} - \omega t)} \ , \quad \omega = ck$$

$$\omega = \omega_0 + \mathbf{ku} = \omega_0 + \omega\frac{\mathbf{un}}{c} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{u}{c}\cos\theta}$$

A közeledő hangforrás magasabb, a távolodó alacsonyabb hangot ad.

8.5. Mikor tekinthető összenyomhatatlannak egy áramlás?

$\mathbf{f} = 0$. Bernoulli-egyenlet:

$$\frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)} = 0$$

Ha a folyadék kissé összenyomható,

$$\rho(p) \approx \underbrace{\rho(p_0)}_{\rho_0} + \underbrace{\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s}_{\rho_0\kappa_s} (p - p_0) = \rho_0\,(1 + \kappa_s(p - p_0))$$

$$\frac{1}{\rho(p)} = \frac{1}{\rho_0}\,(1 - \kappa_s(p - p_0))$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{1}{\rho_0}(p - p_0) - \frac{1}{2}\frac{\kappa_s}{\rho_0}(p - p_0)^2 = 0$$

Ha az utolsó tag elhanyagolható, akkor tekinthető összenyomhatatlannak a folyadék:

$$\frac{1}{2}\frac{\kappa_s}{\rho_0}(p - p_0)^2 \ll \frac{v^2}{2}$$

Mivel ilyenkor $p - p_0 \approx -\frac{\rho_0}{2}v^2$, ezzel az összenyomhatatlanság feltétele

$$\frac{1}{8}\kappa_s\rho_0 v^4 \ll \frac{v^2}{2}$$

azaz, mivel $\kappa_s\rho_0 = 1/c^2$,

$$\frac{1}{8}\frac{v^4}{c^2} \ll \frac{v^2}{2}$$

vagy

$$\frac{1}{4}\frac{v^2}{c^2} \ll 1$$

8.6. Hangkeltés. Hangterjedés, visszaverődés és törés.

- **Hangkeltés**

Az elektrodinamikából ismeretes, hogy a hullámegyenlet megoldása a forrástól nagy távolságban

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \mathrm{div}\frac{\mathbf{P}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}$$

alakú, ahol $\mathbf{P}(t)$ a forrásra jellemző mennyiség (a dipólnyomaték). A $c \to \infty$ határeset az összenyomhatatlan folyadéknak felel meg, ezért $\mathbf{P}(t)$ az a mennyiség, amely ilyenkor megjelenik a forrásként szereplő test körüli áramlást leíró sebességpotenciálban nagy r-re. $\Phi(\mathbf{r},t)$ ilyenkor mindig div$\mathbf{P}(t)/r$ alakú, hacsak a test nem pulzál. $\mathbf{P}$ a test sebességével lesz arányos, gömbre pl. $\mathbf{P}(t) = \frac{1}{2}R^3\mathbf{v}_0(t)$. A hullámzónában ($r \gg \lambda$) elég a számlálót deriválni (egyéb tagok $1/r$-nél gyorsabban tartanak nullához), így

$$\Phi(\mathbf{r},t) = -\frac{\dot{\mathbf{P}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\mathbf{n}}{cr}$$

és

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Phi = \frac{\ddot{\mathbf{P}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\mathbf{n}}{c^2 r}\mathbf{n}$$

Energiaáram-sűrűség: $cE\mathbf{n}$, ahol síkhullámra $E = \rho_0 v^2$.
A kisugárzott intenzitás

$$I = \int c\rho_0 \underbrace{\overline{v^2}}_{\text{időátlag}} \mathbf{n}d\mathbf{F} \underbrace{=}_{\text{gömbre}} \frac{2\pi\rho_0}{c^3}\overline{\ddot{P}^2}\int_0^\pi \cos^2\vartheta \sin\vartheta d\vartheta = \frac{4\pi\rho_0}{3c^3}\overline{\ddot{P}^2}$$

Mivel $P \propto v_0$, harmonikus rezgés esetén $I \propto \omega^4$.
Gömbre pl.

$$I = \frac{\pi\rho_0 R^6}{3c^3}v_0^2\omega^4$$

Henger esetén (a henger egységnyi hosszára vonatkoztatva)

$$I = \frac{\pi^2\rho_0 R^4}{4c^2}v_0^2\omega^3$$

- Hangterjedés
  - A hőmérséklet, és ezzel együtt c felfelé növekszik:
    Teljes visszaverődés, nagy távolságban hallani a hangot.

- A hőmérséklet, és ezzel együtt c felfelé csökken:
  A hang nem hallható.
- A magas hangok messziről nem hallhatók (erősebb a csillapodásuk).

- Visszaverődés és törés

$$\vartheta = \vartheta'$$

$$\frac{\sin \vartheta''}{\sin \vartheta} = \frac{c_2}{c_1}$$

ϑ : beesési szög, ϑ' : visszaverődési szög, ϑ'' : törési szög.

- Szórás
  Kis test által szórt hang teljes szórási hatáskeresztmetszete a hang frekvenciájának negyedik hatványával arányos.

Next Up Previous

Gyula Bene 2008-02-14