

Áramlások fizikája

Bene Gyula

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék

1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A

9. Előadás

Sajátrezgések, állóhullámok. Sípok. Téglatest sajátrezgései. Nehézségi hullámok. Lineáris vízhullámok. Hullámtörés. Diszperzió. Hajóhullámok. Kapilláris hullámok. Nemlineáris hullámok sekély vízben.

9.1. Ismétlés

- Hullámok ideális folyadékban. Hanghullámok

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho' = 0, \quad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{1}{\rho_0 \kappa_s}$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \Delta p' = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{v} = 0$$

- Síkhullámok. A $+x$ irányban haladó hullám

$$\Phi = f(x - ct)$$

Monokromatikus síkhullám:

$$\Phi = \text{Re} \left(A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right), \quad \mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$$

$$c = \nu\lambda, \quad \omega = kc$$

- Hangterjedés mozgó közegben

$$\omega = \omega' \left(1 + \frac{u}{c} \cos \theta \right)$$

- Mozgó hangforrás nyugvó közegben

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{u}{c} \cos \theta}$$

- Az áramlás összenyomhatatlannak tekinthető, ha

$$v \ll c$$

- Hangkeltés

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = - \frac{\dot{\mathbf{P}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \mathbf{n}}{cr}$$

és

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Phi = \frac{\ddot{\mathbf{P}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \mathbf{n}}{c^2 r}$$

Energiaáram-sűrűség: $cE\mathbf{n}$, ahol síkhullámra $E = \rho_0 v^2$.

A kisugárzott intenzitás

$$I = \int c\rho_0 \underbrace{\overline{v^2}}_{\text{időátlag}} \mathbf{n} d\mathbf{F} = \frac{4\pi\rho_0}{3c^3} \overline{\dot{\mathbf{P}}^2}$$

- Hangterjedés
 - A hőmérséklet, és ezzel együtt c felfelé növekszik: Teljes visszaverődés, nagy távolságban hallani a hangot.
 - A hőmérséklet, és ezzel együtt c felfelé csökken: A hang nem hallható.
 - A magas hangok messziről nem hallhatók (erősebb a csillapodásuk).
- Visszaverődés és törés

$$\vartheta = \vartheta'$$

$$\frac{\sin \vartheta''}{\sin \vartheta} = \frac{c_2}{c_1}$$

ϑ : beesési szög, ϑ' : visszaverődési szög, ϑ'' : törési szög.

9.2. Sajátrezgések, állóhullámok.

Külső erő hatása nélkül végbemenő szabad rezgések véges edényben. A határfeltételek miatt frekvenciájuk nem tetszőleges → sajátrezgések (végtelen sok módus lehetséges)
 Állóhullámok alakulnak ki

$$\Phi = \Phi_0(\mathbf{r}) \cos \omega t ,$$

ahol

$$\Delta \Phi_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \Phi_0 = 0 \quad + \text{határfeltételek}$$

A határfeltételek meghatározzák ω -t is. A megoldások szuperpozíciója is megoldás (linearitás).

- **Sípek.**

- Vékony, zárt cső (zárt nyelvsíp)

- A cső hossza legyen L , vastagsága elhanyagolható.

$$v_x|_{x=0} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} = 0 \qquad v_x|_{x=L} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} = 0$$

$$\Phi_0''(x) = -\frac{\omega^2}{c^2} \Phi_0(x) \quad \rightarrow \quad \Phi_0(x) = A \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right)$$

$$\Phi_0'(0) = 0 \rightarrow B = 0 \qquad \Phi_0'(0) = 0 = -A \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right)$$

⇓

$$\Phi_0(x) = A \cos\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) \qquad \frac{\omega_n}{c}L = \pi n \quad n = 1, 2, \dots$$

Sajátfrekvencia:

$$\omega_n = \pi \frac{c}{L} n \quad \nu_n = \frac{c}{2L} n \quad \lambda_n = \frac{c}{\nu_n}$$

$$v_x(x) = - \underbrace{A \frac{\pi}{L} n}_{v_{max}} \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right) \cos \omega_n t$$

$$p'(x) = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \rho_0 \omega_n A \cos \left(\frac{\pi}{L} n x \right) \sin \omega_n t$$

Ahol v_x maximális, ott p minimális (v.ö. Bernoulli-tétel), ellentétes rezgés.

$$p'(x) \propto \rho'(x)$$

Ugyanilyen képletek érvényesek a megfeszített húr rezgéseire. Ott a rezgés transzverzális, tehát $z \neq 0$ és $c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$.
 ezzel a kezdeti kitéréssel

$$z = A_1 \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right) \cos \left(\pi \frac{c}{L} t \right) + A_2 \sin \left(2 \frac{\pi}{L} x \right) \cos \left(2 \pi \frac{c}{L} t \right)$$

Csak az alaphang és oktávja szólal meg.
 Minden felhang megszólal (különböző intenzitással).
 A zárt cső mint rezonátor előfordul az orgona nyelvsípjai között.



A kialakuló hullámok

$n = 1$	$\nu_1 = \frac{c}{2L}$	alaphang (c^1)
---------	------------------------	--------------------

$n = 2$	$\nu_2 = \frac{c}{L}$	oktáv (c^2)
$n = 3$	$\nu_3 = \frac{3c}{2L}$	(tisza) kvint 3:2 (g^2)
$n = 4$	$\nu_4 = 2\frac{c}{L}$	oktáv (c^3)
$n = 5$	$\nu_5 = \frac{5c}{2L}$	(nagy) terc 5:4 (e^3)
$n = 6$	$\nu_6 = 3\frac{c}{L}$	kvint 3:2 (g^3)
$n = 7$	$\nu_7 = \frac{7c}{2L}$	kis szeptim 7:4 (b^3)
$n = 8$	$\nu_8 = 4\frac{c}{L}$	oktáv (c^4)

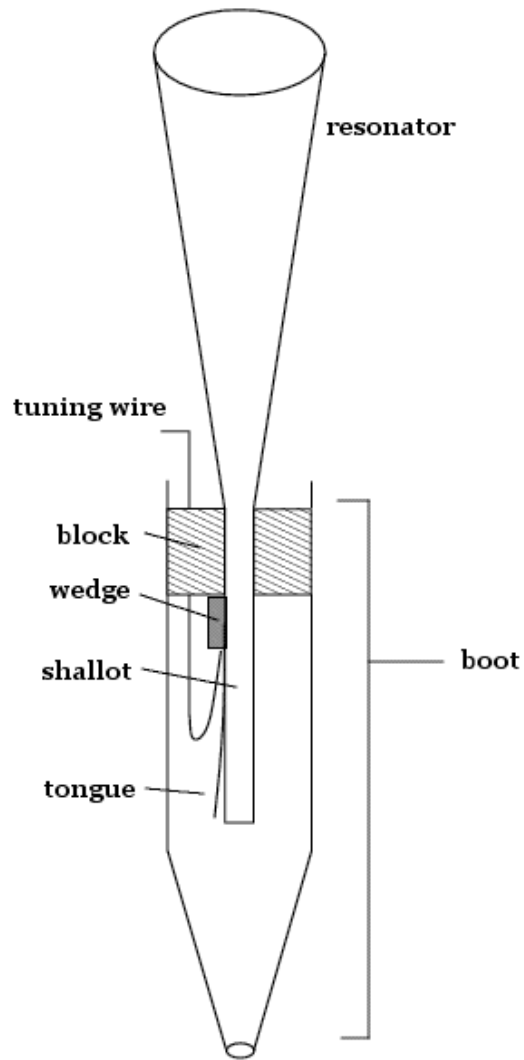
Az általános megoldás

$$v_x(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) \cos\left(\pi\frac{c}{L}nt\right)$$

Fourier-sor. Az A_n együtthatókat a kezdeti feltételek határozzák meg.

A hangszínt az amplitúdó-eloszlás $\{A_n\}$ adja meg. (Pl.: üveghang, ha a páratlan felharmonikusokat kizárjuk.)

- Nyitott nyelvsíp

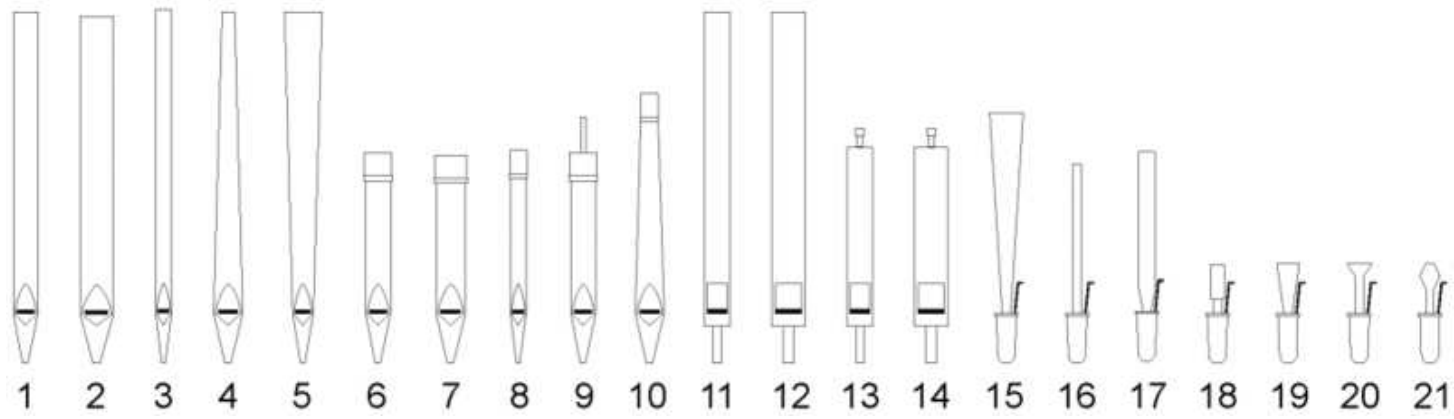


A tetején ($x = L$) $p = \text{áll.}$, tehát p' csomópontja, azaz v_x maximuma. Az alaphang ezért $\lambda_1 = 4L$ hullámhosszú, $\nu_1 = \frac{c}{4L}$ frekvenciájú (mélyebb, mint a zártnál). A következő felhang csak $\lambda_2 = \frac{4}{3}L$ hullámhosszú lehet, $\nu_2 = \frac{3}{4} \frac{c}{L}$, tehát csak a páratlan felhangok jelennek meg.

$$\nu_{n'} = \frac{c}{4L} n', \quad n' = 1, 3, 5, \dots$$

- Ajaksípok





Erősen fújva alul maximális a sebesség (pl. orgona).

Nyitott eset:

$$\nu_n = \frac{c}{2L}n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Zárt eset:

$$\nu_{n'} = \frac{c}{4L}n', \quad n' = 1, 3, 5, \dots$$

Blockflöte gyengén fújva, mint nyelvsíp:

alaphangja: $\nu = \frac{c}{4L} \approx \frac{330}{4 \cdot 0.3} = 225 \text{ Hz}$ (valójában $c^1 = 264 \text{ Hz}$)

Erősen fújva, mint ajaksíp. Az alt (f) és szoprán blockflöte csövének hosszaránya ≈ 1.5 .

• **Téglatest sajátrezgései.**

$v_n = 0$ a falakon.

Egyetlen állóhullám:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = A \cos\left(\frac{\pi}{L_1}lx\right) \cos\left(\frac{\pi}{L_2}my\right) \cos\left(\frac{\pi}{L_3}nz\right)$$

↓

$$\omega^2 = c^2 \pi^2 \left(\frac{l^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2} + \frac{n^2}{L_3^2} \right)$$

l, m, n egész számok. Mindegyik számhármass meghatároz egy sajátfrekvenciát. Ezek sorozata sokkal bonyolultabb, mint a felhangoké.

Egy általános rezonátordobozbeli megoldás

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \Phi_{i0}(\mathbf{r}) \cos(\omega_i t + \alpha_i)$$

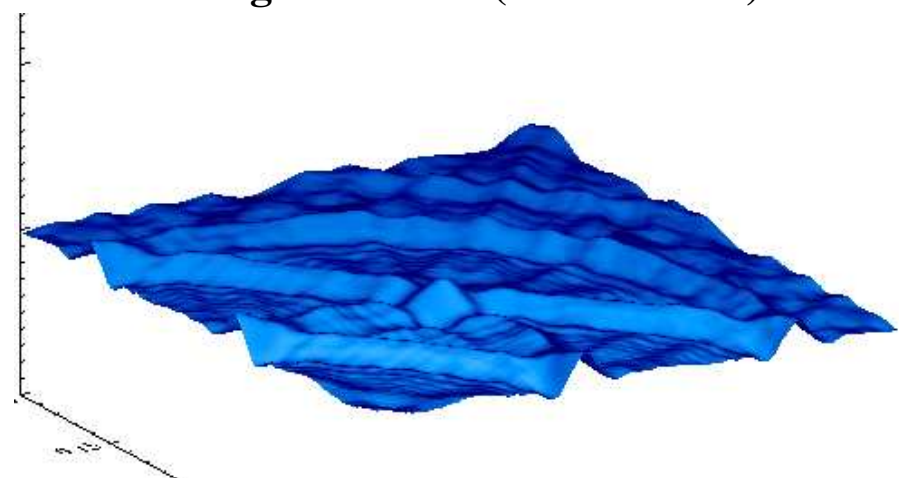
Itt α_i -k az egyes rezgési módusok kezdeti fázisai.

ω_i diszkrét, de szabálytalan értékeket vehet fel.

A hangszer hangszíne a rezonátorban kialakuló sajátrezgésektől és azok amplitudóeloszlásától $\{A_i\}$ függ.

Rezonátor: hegedűtest, cső.

9.4. Nehézségi hullámok (vízhullámok).



Véges mélységű folyadékban

Feltesszük, hogy y -tól nem függ semmi (széles medence)

Összenyomhatatlan folyadékot vizsgálunk

Feltesszük, hogy az áramlás örvénymentes: $\mathbf{v} = \text{grad } \Phi$

Alapegyenletek:

$$\Delta \Phi = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad } \Phi)^2 + \frac{p - p_0}{\rho_0} + gz = 0$$

Bernoulli-egyenlet, p_0 az atmoszférikus nyomás.

Peremfeltételek:

A felület egyenlete $z = \zeta(x, t)$

- A felületi sebesség ζ változásából adódik
Egy részecske sebessége közvetlenül a felület alatt

$$\dot{z} = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + v_x \frac{\partial\zeta}{\partial x}$$

↓

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|_{\zeta} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + v_x \frac{\partial\zeta}{\partial x}$$

- A nyomás ζ -nál p_0 :

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad } \Phi)^2 + gz \right) \Big|_{\zeta} = 0$$

- Alul nincs z irányú sebesség:

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0$$

9.5. Lineáris vízhullámok.

Ha v és ζ kicsi, akkor a négyzetes tagok a lineárisak mellett elhagyhatók:
Egyenletek:

$$\Delta\Phi = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{p - p_0}{\rho_0} + gz = 0$$

Peremfeltételek:

•

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|_{\zeta} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \dot{z}$$

•

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + gz \right) \Big|_{\zeta} = 0$$

- A fenti két peremfeltételből következik, hogy

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{\zeta} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0$$

pozitív irányba haladó hullámot keresünk. Feltevés:

$$\Phi(x, z, t) = \Phi_0(x - ct)\chi(z)$$

$$\Delta \Phi = 0 \Rightarrow \Phi_0''\chi + \Phi_0\chi'' = 0$$

$$\frac{\Phi_0''}{\Phi_0} = -\frac{\chi''}{\chi}$$

A baloldal csak $x - ct$ -től, a jobboldal csak z -től függ, ezért mindkettő konstans kell hogy legyen:

$$\Phi_0'' = -k^2 \Phi_0 \quad \chi'' = k^2 \chi$$

c függhet k -től!
Megoldás:

$$\Phi_0(x - ct) = A_1 \cos(kx - \underbrace{kc(k)}_{\equiv \omega(k)} t), \quad \chi(z) = A \operatorname{ch}k(z + h) + B \operatorname{sh}k(z + h)$$

k a hullámszám.
Az utolsó peremfeltétel miatt $B = 0$.
Tehát

$$\Phi(x, z, t) = A \cos(kx - kct) \operatorname{ch}k(z + h)$$

Az utolsóelőtti peremfeltételből

$$\omega^2 A \operatorname{ch}k(\zeta + h) = gkA \operatorname{sh}k(\zeta + h)$$

Mivel $\zeta \ll h$ gyenge zavar esetén,

$$\omega^2 = gk \tanh kh$$

azaz

$$\omega = \sqrt{gk \tanh kh}$$

A körfrekvencia és a hullámszám között nemlineáris a kapcsolat \rightarrow diszperzió: a terjedési sebesség függ a hullámhossztól.
A második határfeltételből a hullámfelület:

$$\zeta(x, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\zeta \approx 0} = \frac{A\omega}{g} \cosh kh \sin(kx - \omega t)$$

A diszperzió következményei

- Fázissebesség és csoportsebesség

Fázissebesség:

$$c = \frac{\omega(k)}{k}$$

Csoportsebesség:

$$c_g = \frac{d\omega(k)}{dk}$$

A csoportsebesség jelentése:

$$\zeta(x, t) = \int dk f(k) e^{i(kx - \omega(k)t)}$$

A hullámhegyek és hullámvölgyek azok a helyek, ahol az interferencia erős, vagyis a fázis csak lassan változik a hullámszám függvényében. Ennek feltétele:

$$\frac{\partial}{\partial k} (kx - \omega(k)t) = 0$$

azaz

$$x = \frac{d\omega(k)}{dk} t$$

A hullámhegyek és hullámvölgyek tehát a csoportsebességgel mozognak.

Lineáris víz hullámok esetén a fázissebesség

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{th} kh},$$

a csoportsebesség

$$c_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{th} kh} + \frac{h}{2} \sqrt{\frac{gk}{\operatorname{sh} kh \operatorname{ch}^3 kh}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{g (\operatorname{sh}^2(2kh) + (2kh)^2)}{k \operatorname{sh} kh \operatorname{ch}^3 kh}}.$$

Határesetek:

- mély víz:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \ll h \quad \rightarrow \quad kh \gg 1, \quad \text{thkh} \approx 1$$

$$\omega(k) = \sqrt{gk}$$

Fázissebesség:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

Csoportsebesség:

$$c_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{c}{2}$$

○ sekély víz:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \gg h \quad \rightarrow \quad kh \ll 1, \quad \text{thkh} \approx kh$$

$$\omega(k) = \sqrt{ghk}$$

Nincs diszperzió, a fázissebesség egyenlő a csoportsebességgel:

$$c = c_g = \sqrt{gh}$$

- Szétfolyás

Legyen a kezdeti hullámalak σ félszélességű haranggörbe (Gauss-függvény):

$$\zeta(x, 0) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = \operatorname{Re} \frac{A\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2}k^2} e^{ikx} dk$$

Ekkor

$$\zeta(x, t) = \operatorname{Re} \frac{A\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2}k^2} e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$$

Ha

$$\omega(k) \approx \left. \frac{d\omega(k)}{dk} \right|_{k=0} k + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\omega(k)}{dk^2} \right|_{k=0} k^2 = ak + \frac{1}{2}bk^2,$$

akkor

$$\zeta(x, t) = \operatorname{Re} \frac{A\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2 + ibt}{2}k^2} e^{ik(x-at)} dk = \operatorname{Re} A \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + ibt}} \exp\left(-\frac{(x-at)^2}{2(\sigma^2 + ibt)}\right) = A \sqrt[4]{\frac{\sigma^4}{\sigma^4 + b^2t^2}} \exp\left(-\frac{(x-at)^2}{2(\sigma^2 + b^2t^2/\sigma^2)}\right) \cos\left(\frac{(x-at)^2 bt}{2(\sigma^4 + b^2t^2)} + \delta\right)$$

Ennek burkolója $\sqrt{\sigma^2 + b^2t^2/\sigma^2} > \sigma$ félszélességű haranggörbe (melynek maximuma az $x = at$ helyen van).

A szétfolyás oka: az egyes monokromatikus összetevők különböző sebességgel haladnak, így az idő múlásával egyre inkább rendezetlen fázisokkal adódnak össze. → Az amplitúdó csökken, a szélesség növekszik.

- Hullámtörés

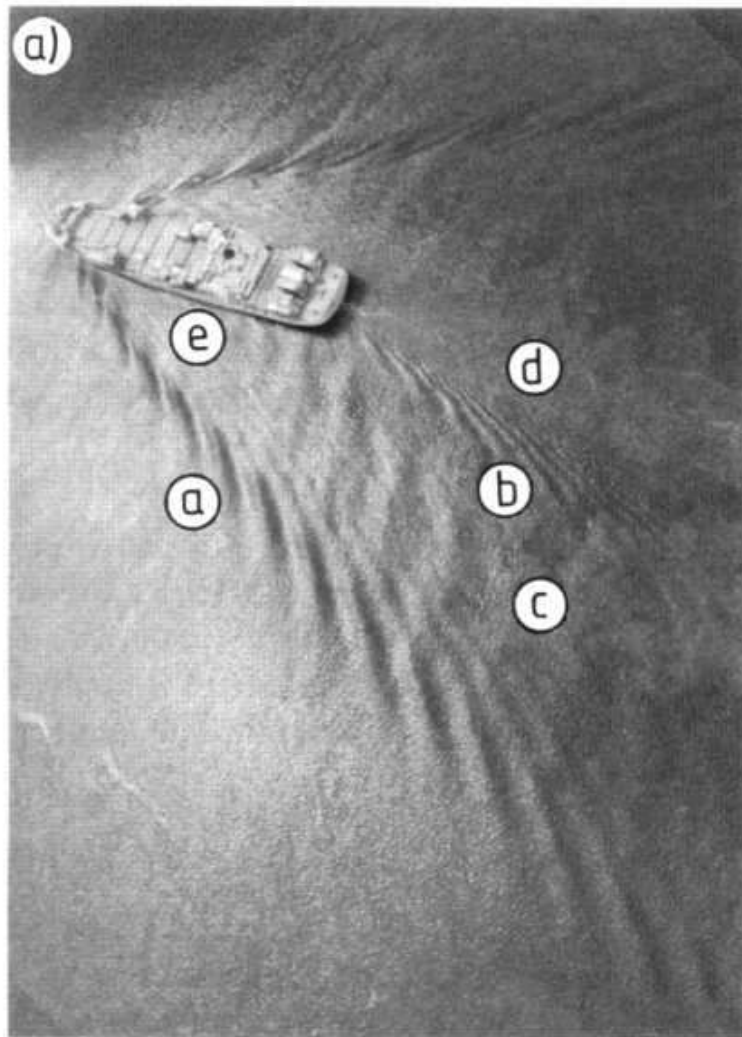


$\lambda > h$ esetén $c = \sqrt{gh}$, ezért a mélyebb vízben terjedő hullámok gyorsabbak, utolérik a sekélyebb vízben terjedőket és átbuknak rajtuk.



Cunami (szökőár), 2004, Thaiföld. A tengerrengés okozta hullámok a nyílt óceánon több száz kilométer hullámhosszúságúak és mindössze kb. 300mm-es amplitudójúak. Partközelen lelassulnak, feltorlódnak (4-30 méteres magasságú vízfallá), és az addig nagy területen szétszórt energiájuk a partszakaszokon koncentrálódva hatalmas pusztítást okoz.

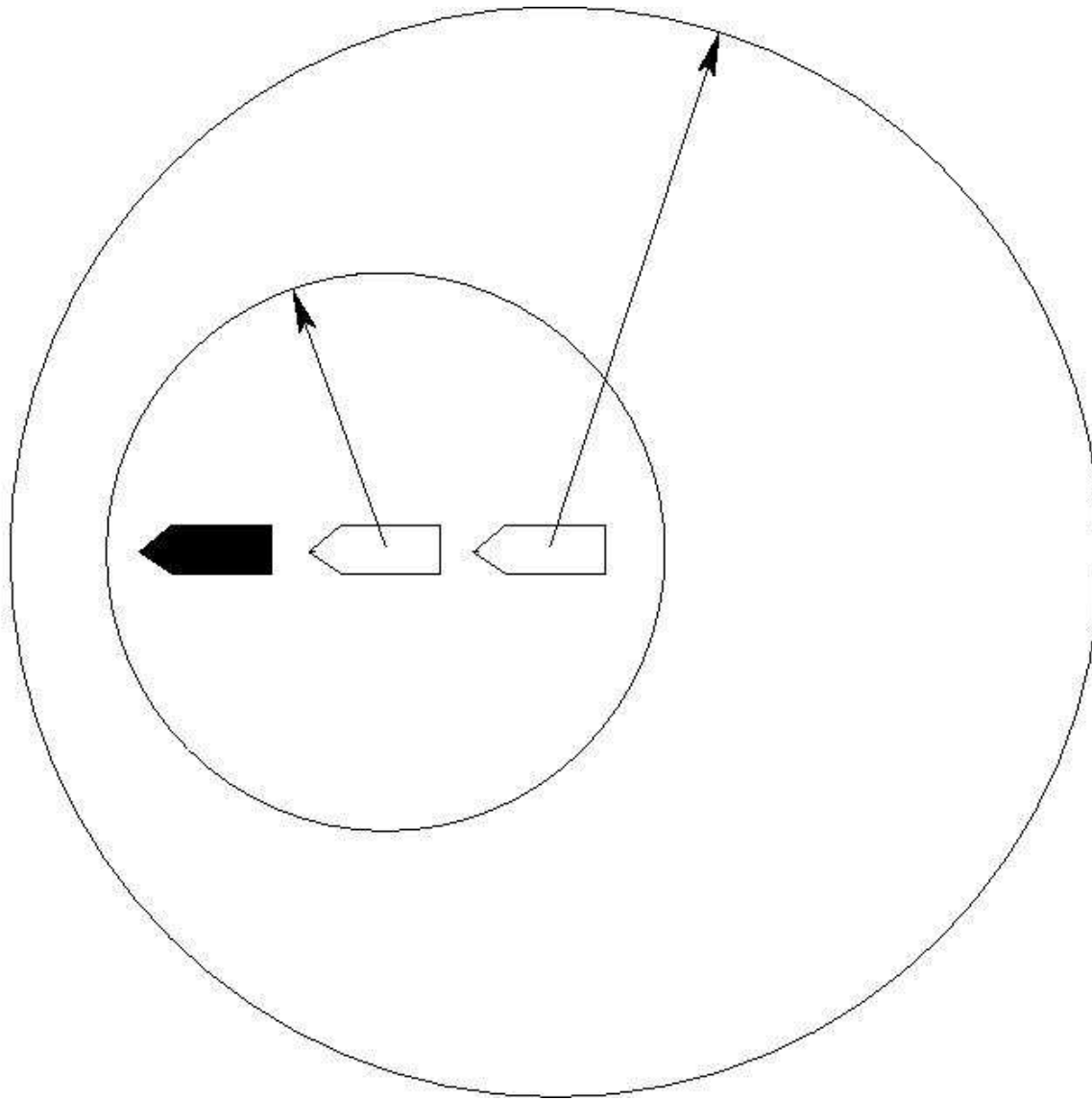
- Kelvin-féle hajóhullámok



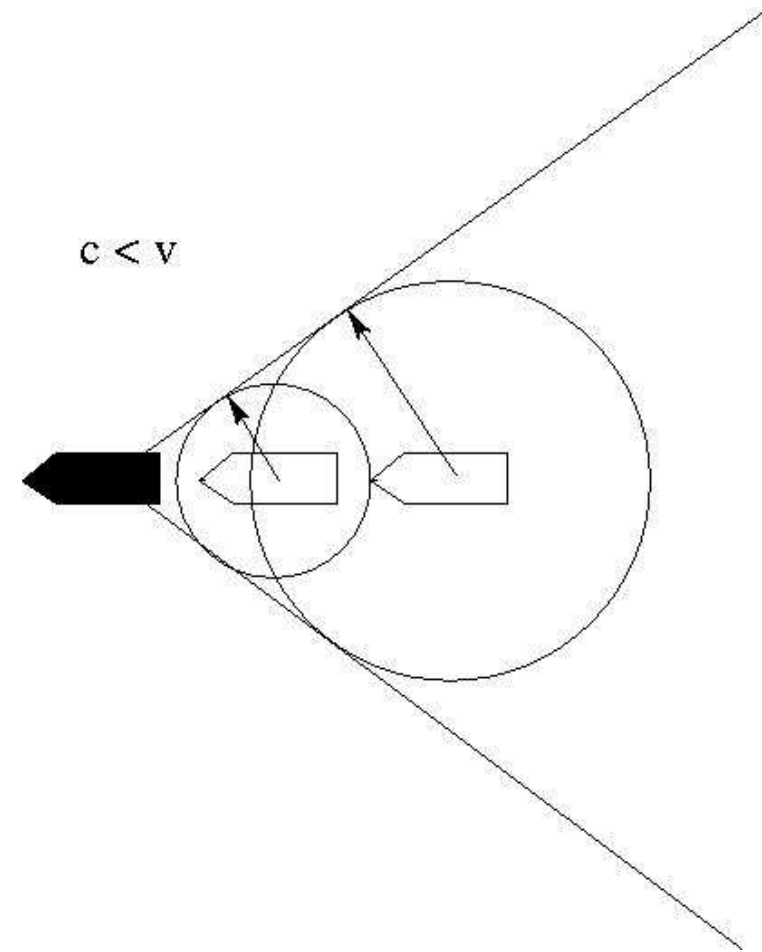
b)

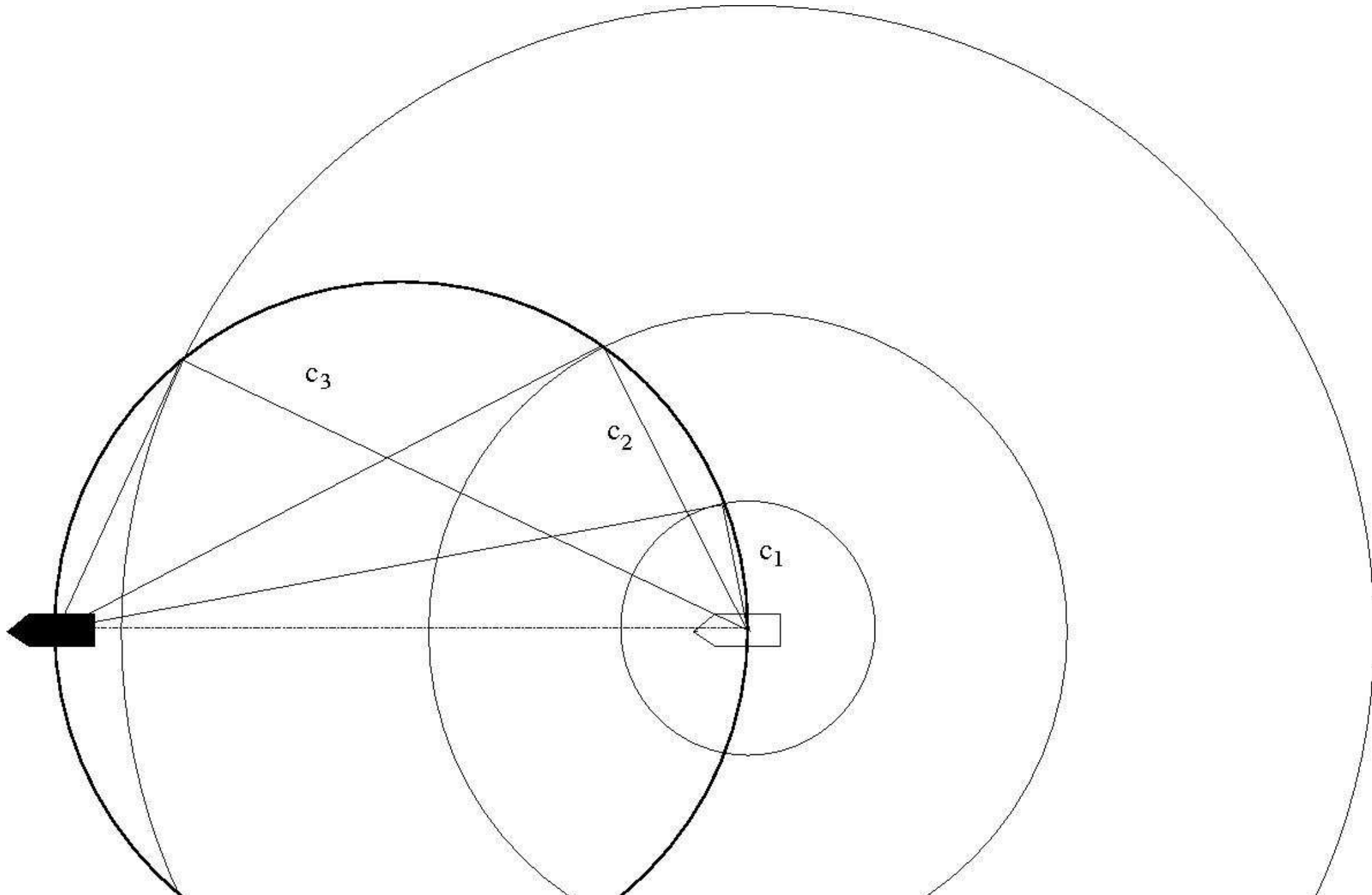


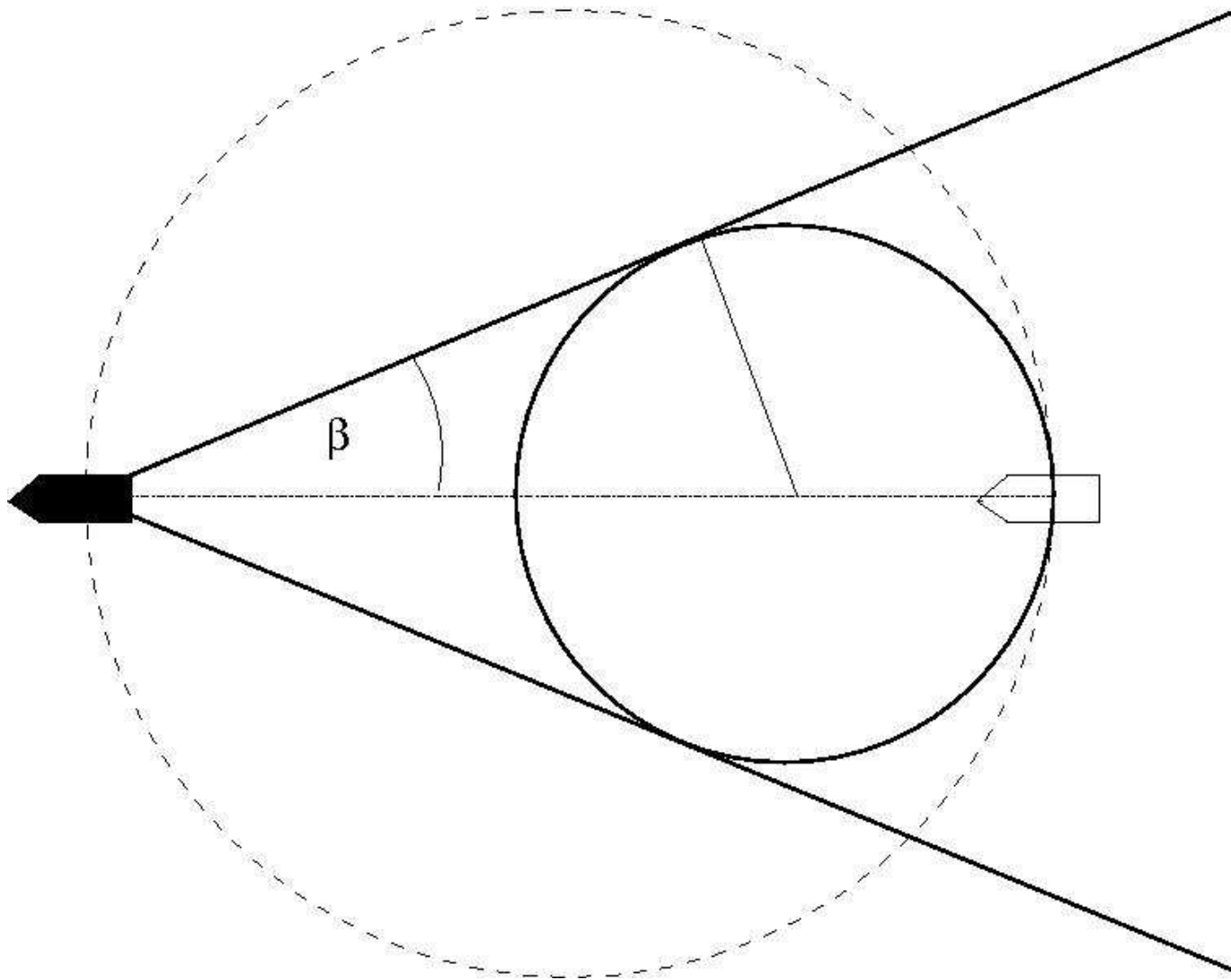
$c > v$



$c < v$



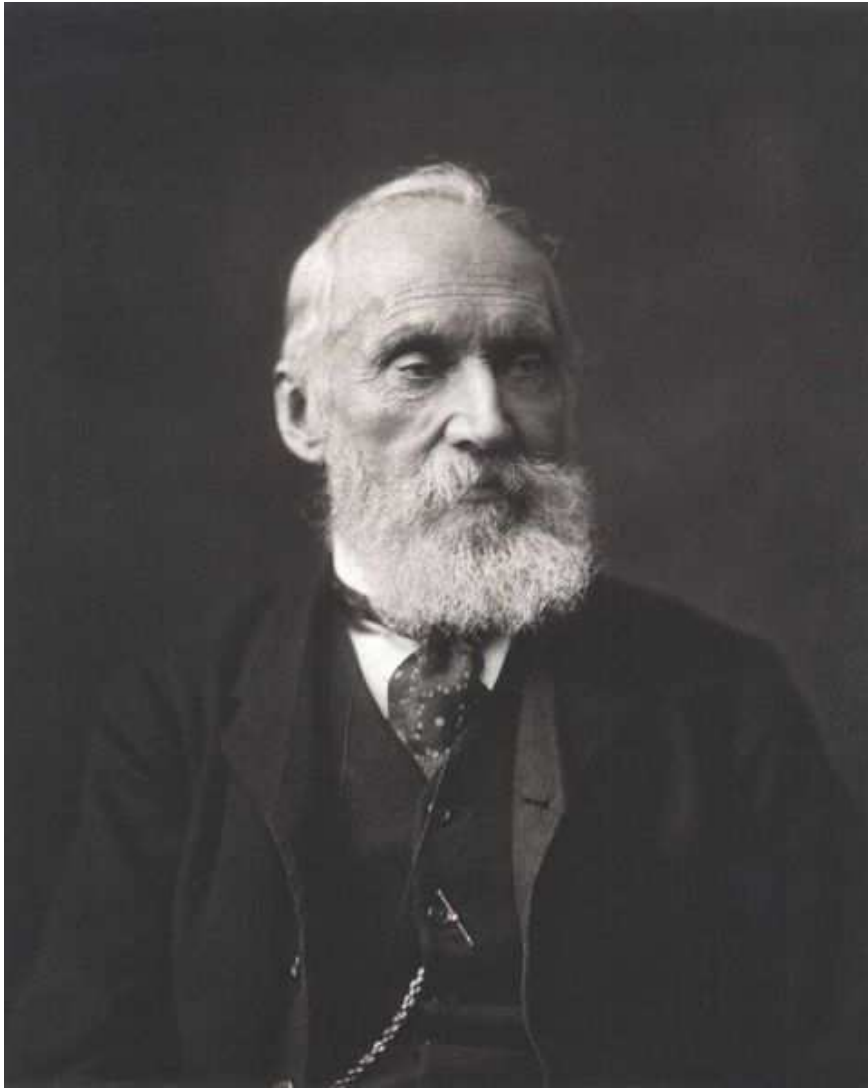




$$\sin \beta = \frac{1}{3} \Rightarrow \beta = 19^\circ 28'$$



Hajóhullámok a felhőzetben. A hajó szerepét itt az Amszterdam-sziget játssza (Indiai-óceán)

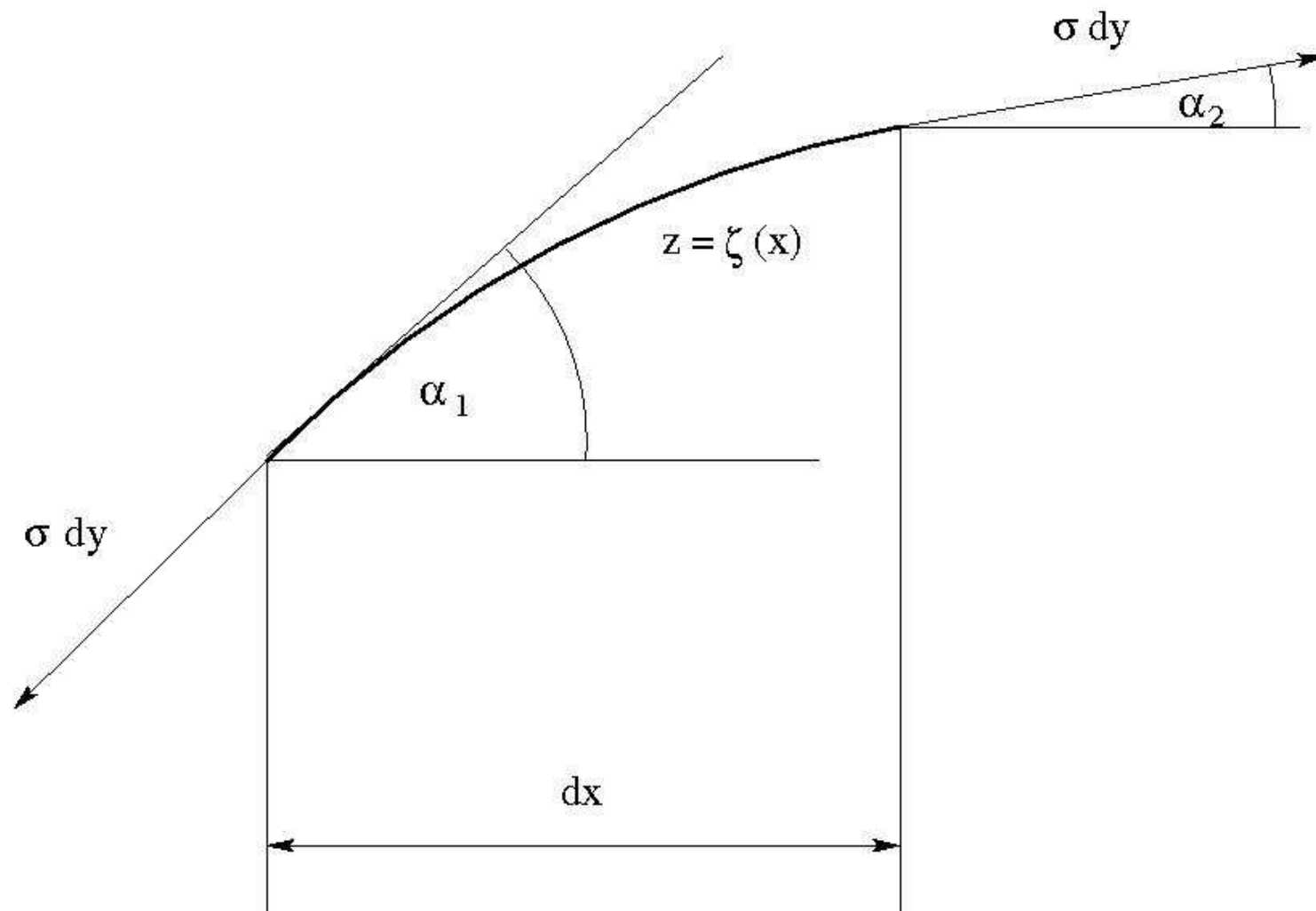


William Thomson (Lord Kelvin), (1824-1907)

9.6. Kapilláris hullámok.



Esőcseppek becsapódása által keltett kapilláris hullámok



A felületi feszültségből eredő nyomás:

$$\Delta p = \frac{\sigma dy (\alpha_1 - \alpha_2)}{dy dx / \cos \alpha_1} = -\sigma \frac{\zeta''}{(1 + \zeta'^2)^{3/2}}$$

Lineáris víz hullámok esetén a egyenletek:

$$\Delta \Phi = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p + \Delta p - p_0}{\rho} + gz = 0$$

Peremfeltételek:

•

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \dot{\zeta}$$

•

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\zeta} + g\zeta - \frac{\sigma}{\rho} \zeta'' = 0$$

• A fenti két peremfeltételből következik, hogy

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z \partial x^2} \right) \Big|_{\zeta} = 0$$

•

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0$$

A megoldás ismét

$$\Phi(x, z, t) = A \cos(kx - \omega t) \operatorname{ch} k(z + h)$$

Ezt a felszínen felírt Bernoulli-egyenletbe betéve:

$$-\omega^2 \operatorname{ch} k(\zeta + h) + gk \operatorname{sh} k(\zeta + h) + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \operatorname{sh} k(\zeta + h) = 0$$

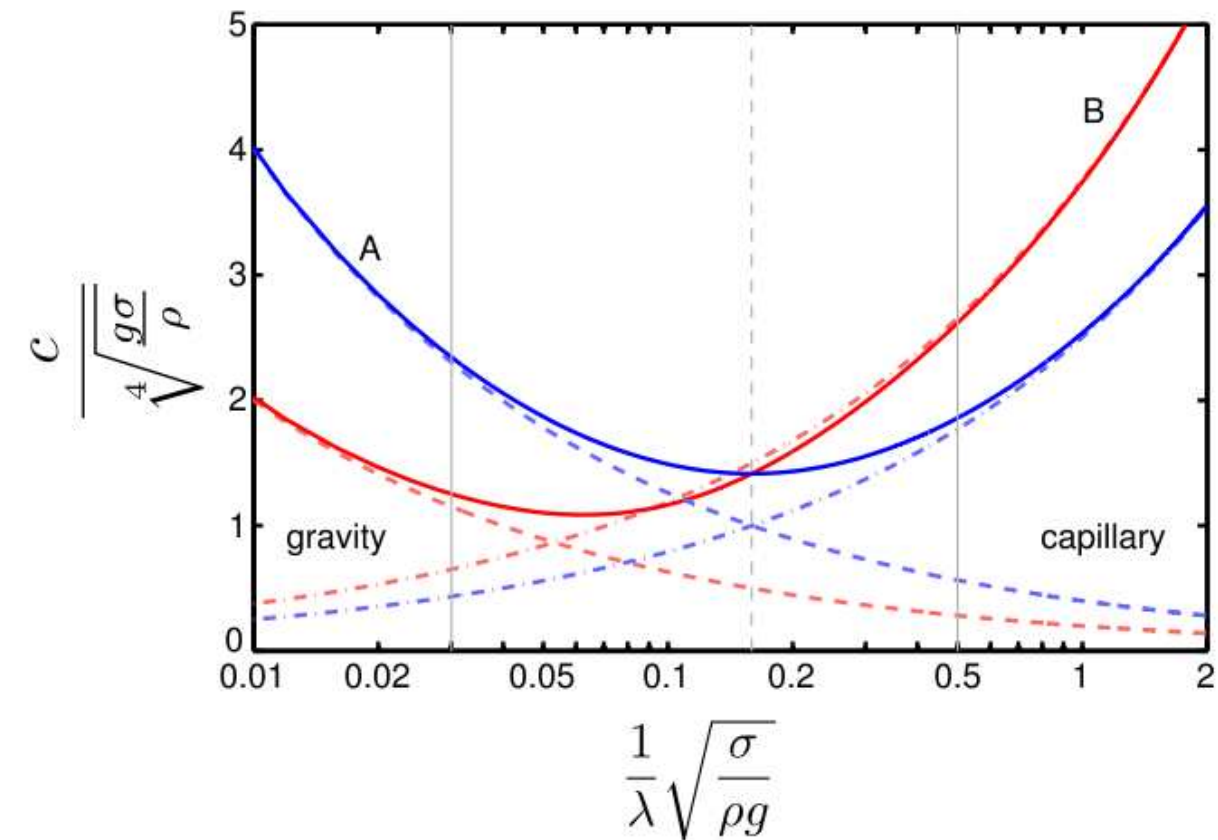
Mivel $\zeta \ll h$, azt kapjuk, hogy

$$\omega(k) = \sqrt{\left(gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right) \operatorname{th} kh}$$

Kapilláris hullámok mély víz felszínén:

$$\omega(k) = \sqrt{gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3}$$

Itt σ a felületi feszültség.



Kapilláris hullámok fázis- és csoportsebessége a hullámszám függvényében. Fázissebesség: kék, csoportsebesség: piros

Fázissebesség:

$$c(k) = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\sigma}{\rho} k}$$

Csoportsebesség:

$$c_g(k) = \frac{g + 3\frac{\sigma}{\rho}k^2}{2\sqrt{gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3}} = \frac{3}{2}c(k) - \frac{g/k}{c(k)}$$

9.7. Nemlineáris hullámok sekély vízben.

A Korteweg-de Vries-egyenlet

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + c \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{3}{2h} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \right) = 0$$

Itt $c = \sqrt{gh}$.

[Szoliton](#)

$$\zeta(x, t) = \underbrace{\frac{v_0^2 - c^2}{g}}_{A \text{ amplitudó}} \frac{1}{\text{ch}^2 \left[\sqrt{\frac{3}{4} \frac{v_0^2 - c^2}{c^2 h^2}} (x - v_0 t) \right]}$$

Ez a nemlinearitás miatt megőrzi alakját, nem folyik szét.

$$v_0^2 = g(h + A)$$

A sebesség az amplitudótól függ, és nagyobb a lineáris hullámok maximális $c = \sqrt{gh}$ sebességénél (bár csak kicsivel, mivel $v_0 \approx c \left(1 + \frac{1}{2} \frac{A}{h}\right)$ és $A \ll h$).

A szoliton felfedezése: John Scott Russell, 1834.



Csónak megállása után vízdomb, kb. 14 km/h-val halad, szélessége ~7 m, magassága ~0.4 m. A vízmélység 1.1 m volt. Negyedórán át tudta követni lóháton. Későbbi kísérletek. A legjobb keltési mód: kő vízbeejtése.



[A nagyobb szoliton utoléri és megelőzi a kisebbet.](#) A szolitonok ütközéskor megőrzik alakjukat.

[Next](#) [Up](#) [Previous](#)

Gyula Bene 2008-02-14