

Hővezetés egyenlet négyszögletes síklemezre

Modern numerikus módszerek a fizikában

Maller Péter (CVP4V3)

2020.06.17.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Elméleti áttekintés	2
2.1. A hővezetés egyenlet	2
2.2. Explicit Euler - módszer	2
3. Eredmények	4

1. Bevezetés

Feladatomban az időfüggő hővezetési egyenlet négyzetes síklemezre való megoldását választottam, a következő határfeltételek mellett:

- alul adott a hőmérséklet, az él mentén lineáris a hőmérsékletprofil
- jobb oldalon adott konstans a hőáram
- a másik két él mentén tökéletes a hőszigetelés.

A kezdeti feltétel a lap mentén mindkét derékszögű koordinátában lineáris, ami egyben az alsó él mentén a határfeltételnek is eleget tesz.

2. Elméleti áttekintés

2.1. A hővezetés egyenlet

Azt a természetben megfigyelhető tényről, hogy hő áramlik a melegebb helyről a hidegebb felé, a következő matematikai egyenlettel fejezhetjük ki [1]:

$$\mathbf{H} = -\kappa \nabla T(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

ahol $\mathbf{H}$ hőáram, κ a hővezetési együttható. Az anyagban levő összes hő mennyisége $Q(t)$ adott időpillanatban arányos a hőmérséklet teljes anyagra vett integráljával:

$$Q(t) = \int d\mathbf{r} C \rho(\mathbf{r}) T(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

ahol C az anyag fajhője és ρ a sűrűsége.

Mivel az energia megmaradó mennyiség, ezért Q időbeli csökkenésének egyenlőnek kell lennie az anyagból kiáramló hővel. Ennek az energiaegyensúlynak és a Gauss tételnek a felhasználásával a hővezetési egyenletet kaphatjuk:

$$\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\kappa}{C\rho} \nabla^2 T(\mathbf{r}, t). \quad (3)$$

Én ennek a két térdimenzióra vonatkozó alakjával foglalkoztam:

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\kappa}{C\rho} \left(\frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \right). \quad (4)$$

2.2. Explicit Euler - módszer

A szimulációt véges elem módszerrel végeztem, tehát mind a teret, mind az időt diszkrétizáltam. Az egyenletekben, a vizsgált időpontokat k -val indexeltem, a térben elhelyezkedő pontok x , illetve y irányú koordinátáit i és j index jelöli. A térbeli pontok távolsága, Δx és Δy , az időbeli lépésköz pedig Δt . Ahhoz, hogy megkapjuk a szimulációhoz használt rekurziós formulát, először írjuk fel $T_{i,j}^{n-1}$ -n körüli Taylor - sorát első rendig:

$$T_{i,j}^{n-1} = T_{i,j}^n - \Delta t \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{i,j}^n, \quad (5)$$

vagyis

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{i,j}^n = \frac{T_{i,j}^n - T_{i,j}^{n-1}}{\Delta t}. \quad (6)$$

A következő lépésben $T_{i+1,j}^{n-1}$ és $T_{i-1,j}^{n-1}$ körüli Taylor - sorát írjuk fel másodrendig:

$$T_{i+1,j}^{n-1} = T_{i,j}^{n-1} + \Delta x \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i,j}^{n-1} + \frac{\Delta x^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{i,j}^{n-1} \quad (7)$$

$$T_{i-1,j}^{n-1} = T_{i,j}^{n-1} - \Delta x \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i,j}^{n-1} + \frac{\Delta x^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{i,j}^{n-1}. \quad (8)$$

A (7) és (8) egyenleteket összeadva és a második deriváltra kifejezve:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{i,j}^{n-1} = \frac{T_{i+1,j}^{n-1} + T_{i-1,j}^{n-1} - 2T_{i,j}^{n-1}}{\Delta x^2}. \quad (9)$$

Az y irányban elvégezve ugyanezeket a műveleteket:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{i,j}^{n-1} = \frac{T_{i,j+1}^{n-1} + T_{i,j-1}^{n-1} - 2T_{i,j}^{n-1}}{\Delta y^2}. \quad (10)$$

Legyen $\Delta x = \Delta y = h$ és a kapott deriváltakat írjuk vissza a hővezetési egyenletbe:

$$\frac{T_{i,j}^n - T_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{T_{i+1,j}^{n-1} + T_{i-1,j}^{n-1} - 4T_{i,j}^{n-1} + T_{i,j+1}^{n-1} + T_{i,j-1}^{n-1}}{h^2} \right). \quad (11)$$

Kifejezve az egyetlen n -ben vett tagot:

$$T_{i,j}^n = T_{i,j}^{n-1} + \alpha \frac{\Delta t}{h^2} (T_{i+1,j}^{n-1} + T_{i-1,j}^{n-1} - 4T_{i,j}^{n-1} + T_{i,j+1}^{n-1} + T_{i,j-1}^{n-1}), \quad (12)$$

ahol $\alpha = \frac{\kappa}{C\rho}$.

A téglalap alsó oldalán adott Dirichlet - határfeltételt úgy szimuláltam, hogy minden időlépés után visszaállítottam a lineáris profilt. A jobb oldalon adott Neumann - határfeltétel figyelembevételhez, pedig azon az oldalon egy ún. szellem gridet vezettem be. Amelyet a számítások figyelembe veszünk, viszont nem jelenítünk meg.

Ebben az esetben a határfeltétel a következő:

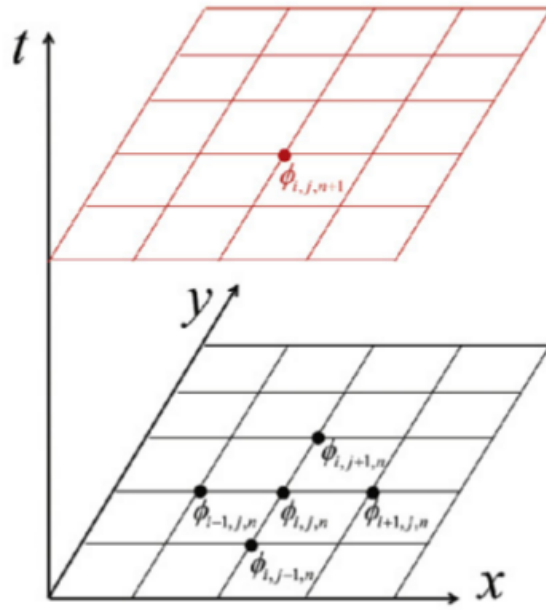
$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{0,j}^k = Q. \quad (13)$$

Azt, hogy szimulációnk mennyire közelíti az analitikus megoldást, illetve, hogy mitől függ a hatékonysága, a Neumann stabilitásvizsgálati módszerrel becsülhetjük meg [2]. Ez a módszer, arra a feltételezésre épül, miszerint a differenciálegyenlet saját módusai a következő alakban írhatók:

$$T_m^j = \xi(k)^j e^{ikm\Delta x}, \quad (14)$$

ahol $x = m\Delta x$ és $t = j\Delta t$. ξ a k hullámszám ismeretlen, komplex függvénye. Ha a differenciálegyenlet általános megoldása kifejthető ezen sajátmódusok szerint, akkor a megoldás stabil, ha a sajátmódusok stabilak. Egy sajátmódus pedig akkor stabil, ha a amplitúdó nem növekszik időben, vagyis $\xi(k) < 1$ teljesül minden k -ra. A stabilitásvizsgálathoz a (14) kifejezést kell behelyettesíteni a (12) egyenletbe:

$$\xi^{j+1} e^{ikm\Delta x} = \xi^j e^{ikm\Delta x} + \eta \left(\xi^j e^{ik(m+1)\Delta x} + \xi^j e^{ik(m-1)\Delta x} - 2\xi^j e^{ikm\Delta x} \right). \quad (15)$$



1. ábra. Explicit Euler - módszer szemléltetése.

Ebből, felhasználva az Euler - formulát:

$$\xi(k) = 1 + 2\eta (\cos k\Delta x - 1) . \quad (16)$$

Hogy $\xi(k) < 1$ teljesüljön minden k -ra:

$$\eta = \frac{\kappa\Delta t}{C\rho\Delta x^2} < \frac{1}{2} . \quad (17)$$

A (17) egyenlet alapján minél kisebb Δt időlépést választunk, annál stabilabb megoldást kapunk. De, ha csökkentjük a Δx térbeli lépéshosszt, anélkül hogy ehhez képest egyidejűleg négyzetesen változtatnánk az időlépést, a stabilitás csökkenni fog. Ezt a számítást azért végezhattük így, csak Δx -et figyelembe véve mert a szimulációban mindkét térirányban azonos lépésközt használunk. Ez nagymértékben nyújtott négyszög esetén nem ideális, viszont nagyban egyszerűsíti a számolást és a szimulációt is.

3. Eredmények

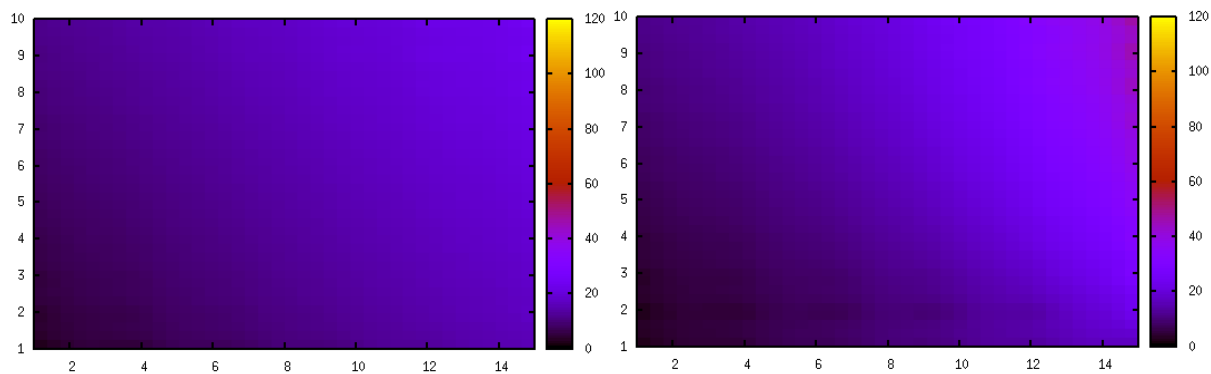
A szimuláció eredményét "valós időben" ábrázoltam a Gnuplot grafikus programmal. A 2. és a 3. ábrák egy szimuláció eredményét mutatják egy-egy időpontban. A beállítások ennél a következők voltak:

$$h = 0.0625$$

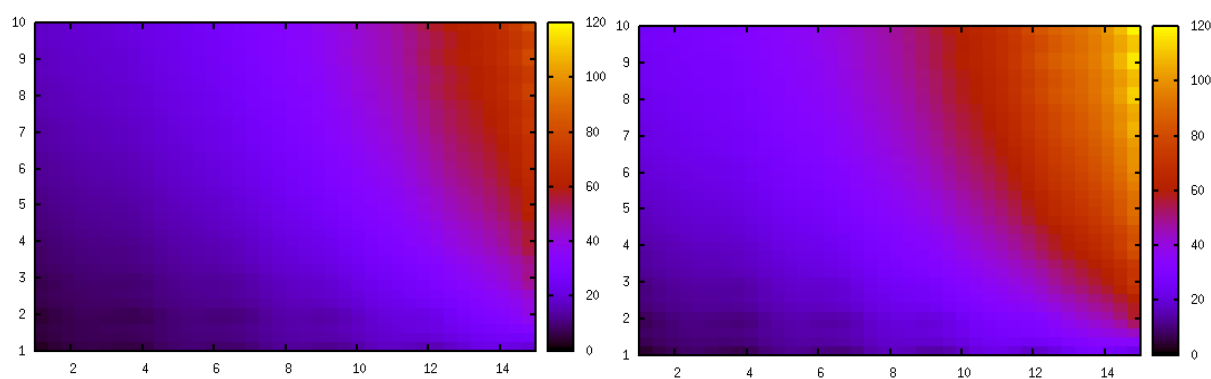
$$dt = 0.00001$$

$$\alpha = 1$$

Ezek alapján $\eta = 0.00256$, ami láthatóan a stabil régióban van.



2. ábra. Hővezetés négyzetes síklemezen, a kezdő (bal oldalon) és a $t = 0.375$ (jobb oldalon) időpillanatban



3. ábra. Hővezetés négyzetes síklemezen, a $t = 2 \cdot 0.375$ (bal oldalon) és a $t = 3 \cdot 0.375$ (jobb oldalon) időpillanatban

Irodalomjegyzék

- [1] Rubin H. Landau, Jose Paez, and Cristian C. Bordeianu. *A Survey of Computational Physics: Introductory Computational Science*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, har/cdr edition, 2008.
- [2] Santosh Konangi, Nikhil K. Palakurthi, and Urmila Ghia. Von Neumann stability analysis of first-order accurate discretization schemes for one-dimensional (1d) and two-dimensional (2d) fluid flow equations. *Computers Mathematics with Applications*, 75(2):643 – 665, 2018.