

Drótkeretre feszített szappanhártya alakja

Tamás Krisztián

2020. július 1.

Kivonat

Feladatom két egymásra merőleges félkör alakú drótkeret által kifeszített szappanhártya alakjának meghatározása volt, úgy hogy a drótkeretek közös átmérőjük végpontjában vannak összeerősítve. A felületi feszültség miatt ilyenkor a szappanhártya a legkisebb felület kialakítására törekszik. Így a probléma egy megadott határral körbevett minimális felület meghatározása.

1. Bevezetés

Drótkeretre feszített szappanhártya alakját fogom meghatározni. A drótkeretet két egymásra merőleges síkú félkör alkotja, melyek közös átmérőjük végpontjában vannak összerősítve. Feladatom ezen drótkeretek közötti szappanhártya felületének meghatározása volt.

Először határozzuk meg a szappanhártya vastagságát. Ehhez vegyük elő a Young-Laplace egyenletet:

$$p_{in} - p_{out} = 2\gamma\kappa \quad (1)$$

ahol p_{in} a nyomás a folyadékon belül, p_{out} pedig kívül, γ a felületi feszültség és κ a görbület. Feltételezzük, hogy a nyomás mindkét oldalon megegyezik a légköri nyomással. Tegyük fel, hogy van egy olyan felület ahol az átlagos görbület nem nulla. Ha feltesszük, hogy a hártyának állandó a vastagsága, és a hártya belsejét a Young-Laplace egyenlet belső folyadékaként kezeljük, akkor a hártya egyik rétegének pozitív a másiknak pedig negatív görbületének kell lennie. Ha ezeket beleírjuk a Young-Laplace egyenletbe, akkor egy ellentmondásra jutunk, mivel ha a pozitív görbülettel rendelkező oldalra alkalmazzuk, akkor más eredményt kapunk a nyomásokra mintha a negatív görbülettel rendelkező oldalra alkalmaznánk. Ebből az következik, hogy egy állandó vastagságú szappanhártyának az átlagos görbülete nulla lesz.

Engedjük meg hogy a hártyánknak változó legyen a vastagsága. Egy szappanhártya akkor veszi fel egyensúlyi alakját, ha az energiája minimális. Egy hártya felületi feszültségének energiáját a következő egyenlet adja meg:

$$E_S = 2\gamma A \quad (2)$$

ahol A a hártya felülete és γ a felületi feszültség. Ebből látszik, hogy ahhoz hogy a minimális energiaszintet elérjük a felületnek is minimálisnak kell lennie, illetve hogy állandó vastagsággal kell rendelkeznie, mivel a vastagság változása felület növekedéssel járna. Ezek miatt a szappanhártya egy infinitezimálisan vékony két dimenziós felületnek tekinthető.

1.1. Felület minimalizálás

Legyen a szappanhártya felülete $z = f(x, y)$, ahol $f(x, y)$ a felület magassága az (x, y) ponton. Ezen hártya felülete a következő integrállal számolható ki:

$$A = \int_S \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy \quad (3)$$

ahol S az a régió a síkban ahol a hártya definiálva van, f_x és f_y az f függvény x és y szerinti deriváltja és f értéke meg van adva S határánál. Ahhoz hogy megadjuk azon $f(x, y)$ alakját ami minimalizálja a felületet adott peremfeltételek mellett, az Euler-Lagrange egyenletet használhatjuk:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_y} = 0 \quad (4)$$

Jelen esetben nekünk:

$$\mathcal{L} = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \quad (5)$$

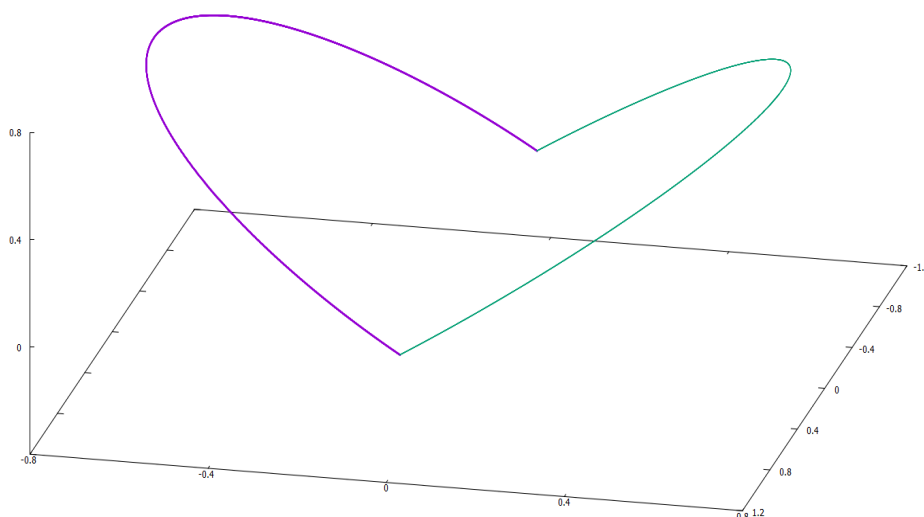
Ezt visszahelyettesítve az Euler-Lagrange egyenletbe a következőre jutunk:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) = 0 \quad (6)$$

Ez egy nemlineáris parciális differenciálegyenlet. Megoldásához szükséges még megadnunk a síkot definiáló körvonalat. Ezt a következőképpen határoztam meg:

$$S(u) = \left(\cos(u), \frac{\sin(u)}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(u)}{\sqrt{2}} \right) \quad (7)$$

Az így paraméterezett görbe a következő képen látható:



1. ábra. A két egymásra merőleges drótkeretet reprezentáló görbe.

A feladatom ezen két görbe által határolt minimális felszín meghatározása volt.

1.2. Használt numerikus módszer

A kapott differenciálegyenletet megoldásához a Newton módszert használtam. Ez egy a következő formába hozott:

$$F(u) = 0 \quad (8)$$

nemlineáris egyenletet tud linearizálni, úgy hogy $F(u)$ értékét közelíti annak Taylor sorának lineáris részeivel egy adott u^- értéknél:

$$F(u) \approx F(u^-) + F'(u^-)(u - u^-) \quad (9)$$

Így a 8. egyenletnek következő a megoldása:

$$u = u^- - \frac{F(u^-)}{F'(u^-)} \quad (10)$$

A mi esetünkben F a 6. egyenletben meghatározott függvény lesz. A differenciálegyenlet numerikus megoldásához a teret diszkretizálni kell. Ezt a következő képpen tettem:

$$x_i = \sin\left(i \frac{\pi}{2(N-1)}\right) \quad (11)$$

$$y_i = \sqrt{\frac{1}{2}} \sin\left(i \frac{\pi}{2(N-1)}\right) \quad (12)$$

ahol $i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$.

A 10. egyenletünk diszkretizált változata a következőképpen néz ki:

$$u^{n+1} = u^n - \frac{f(u^n)}{J(u^n)} \quad (13)$$

Ahol $J = F'(u^n)$ = a Jacobi mátrix.

A deriváltakat a következőképpen lehet közelíteni:

$$\partial_x u_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2dx} \quad (14)$$

$$\partial_x \partial_y u_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{dx^2} \quad (15)$$

Az egyszerűsítés kedvéért bevezethetünk egy γ változót:

$$\gamma_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{(1 + (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2)}} \quad (16)$$

Melynek deriváltja:

$$\gamma'_{i,j} = (1 + (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2)^{-3/2} \quad (17)$$

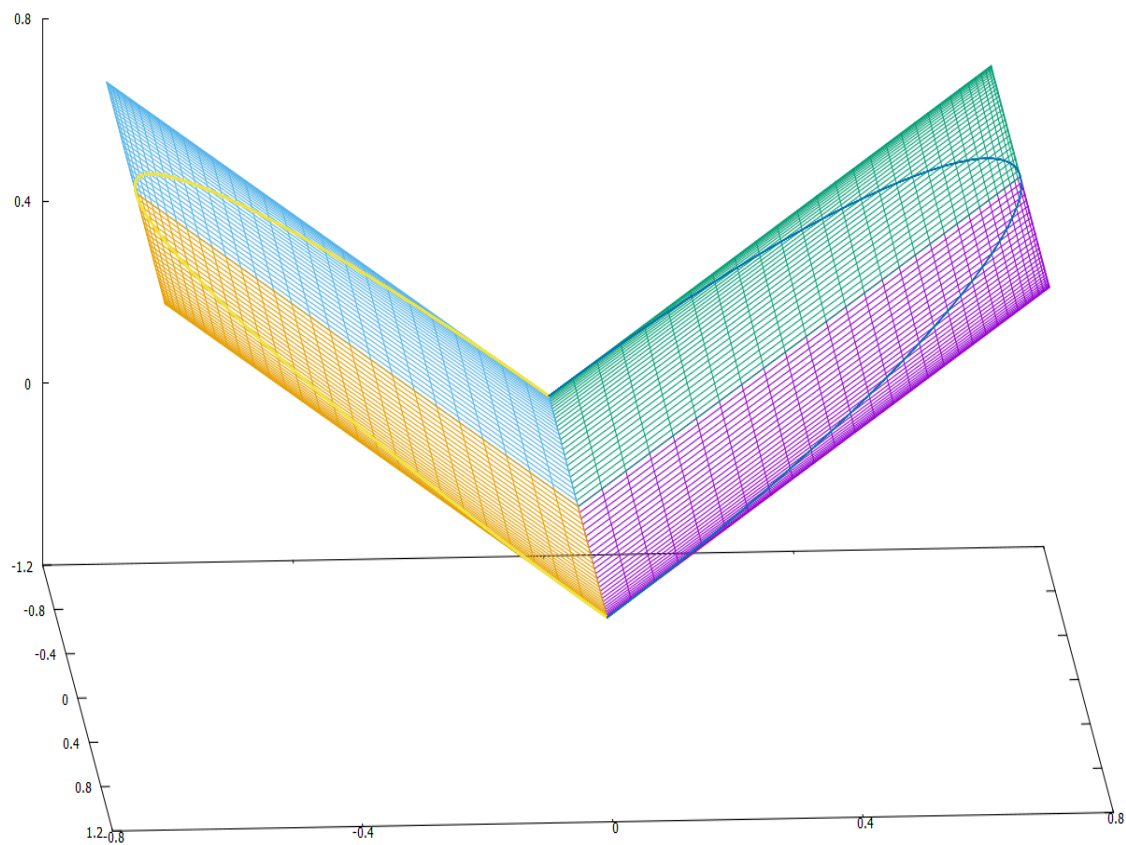
Így az f függvényünk és a Jacobi függvényünk a következőképpen alakulnak:

$$f_{i,j} = \frac{1}{4}(\partial_x \gamma_{i,j})(\partial_x u_{i,j}) + \frac{1}{4}(\partial_y \gamma_{i,j})(\partial_y u_{i,j}) + \gamma_{i,j}(\partial_x \partial_x u_{i,j} + \partial_y \partial_y u_{i,j}) \quad (18)$$

$$J_{i,j} = \frac{1}{4}(\gamma'_{i+1,j} + \gamma'_{i-1,j})\partial_x u_{i,j}^2 + \frac{1}{4}(\gamma'_{i,j+1} + \gamma'_{i,j-1})\partial_y u_{i,j}^2 - 2\gamma'_{i,j} \left(\frac{1}{dx^2} + \frac{1}{dy^2} \right) \quad (19)$$

Mivel a megoldásunknak szimmetrikusnak kell lennie mind a négy síknegyedre, így azt elegendő volt csak az egyikre kiszámolni.

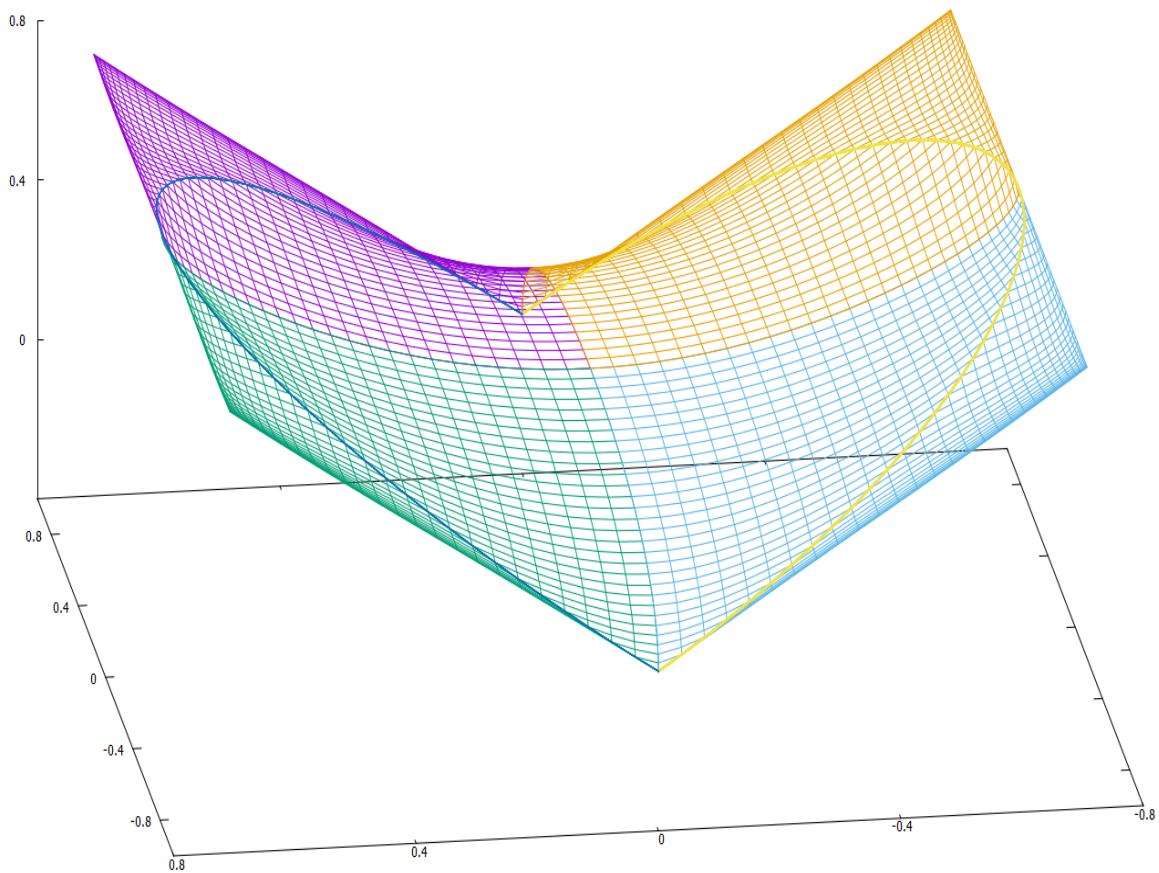
Az iteráció első eleme tetszőlegesen meghatározható. Többféleképpen próbáltam ezt, a leggyorsabban akkor konvergált az algoritmus ha ez a két félkör síkjába esett, tehát $u_0 = y$. Tehát kezdetben a felületünk a következőképpen nézett ki:



2. ábra. A használt kiindulási felület.

2. Eredmények

Többféle gridméretet és iterációt kipróbáltam. A gridméret értéke nagyban befolyásolta a futási időt, úgyhogy egy köztes $N = 30$ értéket használtam. Ennél részletesebb grid már nem sok plusz információt tartalmazott a felület alakjáról, viszont ennél kisebb értékkel már torzult az. Megvizsgáltam hogyan függ az iterációktól a kapott felület alakja. Ebből csináltam egy videót. Ez [ezen](#) a linken elérhető. Látszik, hogy célszerű minél több iterációt venni, viszont figyelembe véve a futási időt kompromisszumot kell kötni. Egy adott iteráció érték felett hasonlóan a gridmérethez nem sokat fog már változni a függvényünk. A végeredményhez 50.000 iterációt és $N = 30$ gridméretet használtam. Ez látható a következő ábrán.



3. ábra. A képen a két drótkeret (sárga és kék vonal) illetve a köztük kifeszített szappanhártya látható. A képhez 50000 iteráción át futtattam a programot, $N = 30$ gridmérettel.

A hártya előállításához használt kódod, a kapott adatfájlokat, illetve az ábrázoláshoz szükséges gnuplot fájlt csatoltam a jegyzőkönyvhöz.

3. Hivatkozások

1. Wikipedia - Minimal surface
2. Frederik Brasz - Soap Films: Statics and Dynamics
3. <http://bolvan.ph.utexas.edu/~vadim/Classes/2016s/soapfilm.pdf>
4. <https://mathematicalgarden.wordpress.com/2014/09/06/soap-film-and-minimal-surface/>
5. Solving nonlinear ODE and PDE problems - Hans Petter Langtangen - 2016
6. Minimális felület számolás - Dénes Gábor Oszkár - 2015