

Időfüggő Hővezetés Vizsgálata Négyszögletes Síklemezen

Bántó Balázs

January 11, 2018

1. Bevezető:

A beadandó feladatban a hővezetés egyenletét vizsgált négyszögletes síklemezre a következő határfeltételekkel:

- baloldalt adott a hőmérséklet, az él mentén lineáris a hőmérsékletprofil
- alul adott konstans hőáram
- a másik két él mentén tökéletes a hőszigetelés

A kezdeti feltétel a lap mentén mindkét derékszögű koordinátában lineáris, ami egyben a baloldali él mentén a határfeltételnek is eleget tesz.

2. Elméleti háttér:

2.1 A hővezetés egyenlete

A hővezetés egyenlete egy parabolikus parciális differenciálegyenlet, amely leírja a hőmérséklet változását helyben és időben. 1D-ben a következő alakban írható fel:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ahol $\alpha > 0$ - anyagspecifikus termális diffúziós együttható, pozitív konstans

2.2 FTCS módszer: az egyenlet numerikus megoldása

Az egyenlet egyszerűen megoldható a forward-time central-space (FTCS) numerikus iteratív módszerrel. A módszer a "centrális különbség"(central difference) és a az Euler-módszerre épít térben és időben. Továbbá, első rendben konvergál időbe, térben pedig másodrendben. A módszer lényege a következő:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u, x, t, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$$

alakú differenciálegyenlet a következő módon oldható meg az FTCS módszerrel:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = F_i^n(u, x, t, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$$

A fenti egyenletben az i az iterációs lépés, n pedig a térbeli helyzethez tartozó index. Ezt alkalmazva a hővetés egyenletére, a következőt kapjuk:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Legyen

$$r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$$

amit szokás stabilitási konstansnak nevezni. A megoldás akkor stabil, ha $r \leq \frac{1}{2}$. Ezek alapján az egyenlet a következő egyszerű alakot veszi fel:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Mivel a megoldandó feladat két dimenziós, már csak az maradt, hogy általánosítsuk a megoldást 2D-re:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + r(u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 4u_{i,j}^n)$$

A feladatot C++-ban oldottam meg, a következőkben pedig bemutatom a kapott eredményeket.

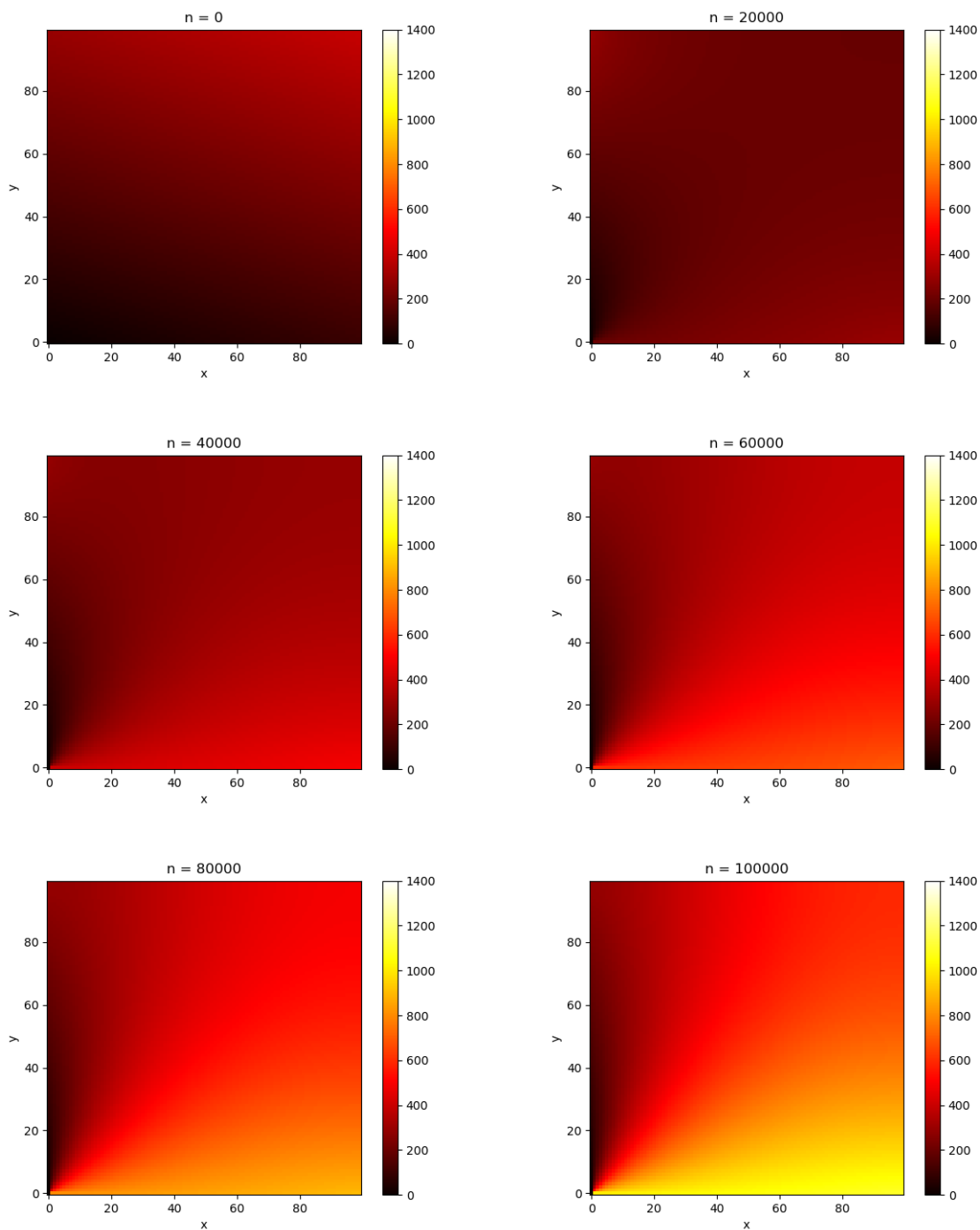
3. A szimuláció

A szimulált felületet négyzetrácscsal modelleztem, melynek rácspontjaihoz egy-egy hőmérsékletet rendeltem, melyek egymással kölcsönhatnak. A kölcsönhatás során a rácspontok hőmérsékletei próbálnak kiegyenlítődni, így alakul ki egy helytől és időtől függő hőmérsékletprofil. A választott numerikus módszer leegyszerűsíti a problémát azzal, hogy a felület távoli pontjai nem hatnak kölcsön egymással explicit módon, azaz elhanyagoljuk a nem-első szomszéd kölcsönhatást. A feladat leírásában nem volt megadva a lineáris peremfeltétel pontos alakja, ezért a következő két esetet vizsgáltam. Az egyik, hogy a bal alsó sarokban a hőmérséklet minimális (1), a másik pedig, hogy a bal alsó sarokban a hőmérséklet maximális (2). Ezeket a feltételeket a következő módon lehet implementálni:

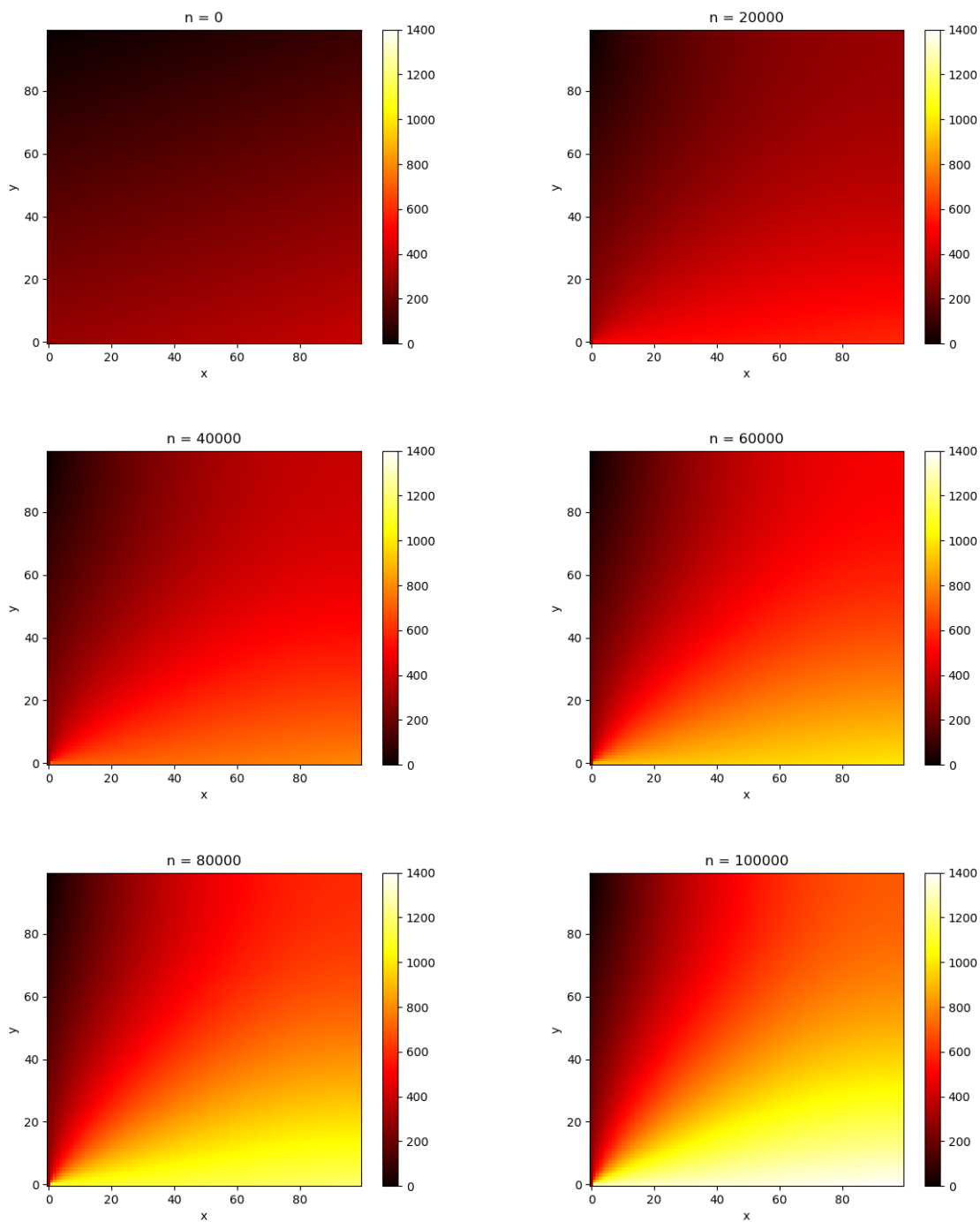
$$u_{i,j} = 3 \cdot (100 - i) + j \tag{1}$$

$$u_{i,j} = 3 \cdot i + j \tag{2}$$

A rendszer peremfeltételeiből adódóan, nem tud kialakulni egy stabil állapot. Mindkét esetben 100x100-as felületet szimuláltam, 100000 időléptetéssel. Az adatokat python segítségével hőterkép formájában ábrázoltam különböző lépésszám eltelte után. Az első esetben, ahol a bal oldali peremfeltétel alulról felfelé növeli a rögzített hőmérsékletet, előáll egy olyan állapot, hogy az alsó rész a beérkező hőáram egy nagyobb részét használja fel a kiegyenlítődség céljából, mint a második esetben, így kialakul egy leárnyékolt zóna a felső részben.



1. A rendszer fejlődése az (1) esetben, amikor a peremfeltétel szerint a hőmérséklet a bal alsó sarokból y irányba nő és x irányba is nő



2. A rendszer fejlődése az (2) esetben, amikor a peremfeltétel szerint a hőmérséklet a bal alsó sarokból y irányba csökken és x irányba pedig nő