

Hőterjedés vizsgálata 2D -ben

Modern numerikus módszerek jegyzőkönyv



Írta: Brunner Kristóf

2017. június 12.

1. A szimuláció rövid leírása, elméleti háttér

Az év végi beadandó témájának én az 1-es feladatot, azaz egy 2D hővezetési probléma megoldását választottam. A feladatban meg volt adva, hogy milyen perem, és kezdfeltételeknek kell teljesülniük, és mivel mind a lineáris felület menti hőmérsékletprofil, mind a konstans hőáram hagy némi „mozgásteret” úgy döntöttem, hogy több különböző jellegű eredményt hasonlítok össze.

A feladat rövid összefoglalója:

Egy négyzet alakú felület bal oldalán adott lineáris a hőmérsékletprofil, az alsó él mentén konstans hőáram fűti a felületet, a jobboldali és a felső él pedig tökéletes szigetelő. A kezdeti feltétel pedig az, hogy a hőmérsékletprofil a $t=0$ időpillanatban lineáris (úgy vettem, hogy mindkét koordinátában), és egyben teljesíti a peremfeltételt a baloldalon. A probléma megoldásához C++ -ban írtam egy programot, melynek segítségével az időt léptetve iteratíván megkaptam a hőmérsékletprofil a teljes felületen valamilyen t idővel az indítás után.

A szimulált felületet négyzetrácsal „modelleztem”, melynek rácspontjaihoz egy egy hőmérsékletet rendeltem. A különböző hőmérsékletű rácspontok egymással kölcsönhatnak, ebben az egyszerű modellben a hőmérséklet különbséggel arányos "erővel" akarnak minden időléptetéssel kiegyenlítődni, így alakul ki egy időtől és helytől függő hőmérsékletprofil. A feltételezés ami radikálisan leegyszerűsíti a problémát az, hogy a távoli pontjai a felületnek nem hatnak kölcsön egymással, azaz elhanyagoljuk a nem-elszomszéd kölcsönhatást. Mivel nem volt megadva a feladat leírásában, hogy a lineáris rögzített peremfeltétel hogyan függ a koordinátától, ezért két külön esetet is megvizsgáltam, és a kettő megoldás közti különbséget vizsgáltam.

- a peremfeltétel szerint a bal-alsó sarokban a hőmérséklet minimális
- a peremfeltétel szerint a bal-alsó sarokban a hőmérséklet maximális

Intuitívan meg lehet tippelni, hogy ha a bal oldali peremfeltétel alulról felfelé növeli a rögzített hőmérsékletet (azaz az 1. eset áll fenn) akkor ennek teljesülése „elszívja” az alsó peremen beérkező hőáramot, így „leárnyékolja” a felső zóna egy részét. Ezzel azonos következtetésre juthatunk a szimuláció segítségével is, azaz igazolhatjuk ennek a naív képnak a helyességét.

Mindkét esetben egy 100×100 -as felületet szimuláltam, 100000 időléptetésig.

Elméleti háttér:

A szimulációhoz az úgynevezett forward-time central-space (FTCS) módszert használtam, mely az Euler-módszert felhasználva adja meg egy differenciálegyenlet megoldását iteratíván. Időben elsőrendben, térben pedig másodrendben konvergál. Kondíciós stabilitása miatt szokták ezt használni a hőáramlási feladatok megoldására. Egy dimenzióban nagyon egyszerűen megérthető a működése. Legyen egy parciális differenciálegyenlet ilyen alakú:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(u, x, t, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right).$$

Ekkor az Euler módszer szerint:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = F_i^n\left(u, x, t, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

ahol felső indexben az iterációs lépés indexe van (időindex), alsó indexben pedig a különböző térbeli helyzethez tartozó index. Mivel ez az egyenlet explicit, azaz u egyetlen számolással megoldható ha ismerjük a korábbi u_i -ket. Például az 1D hőterjedési differenciálegyenlet esetén:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \frac{\alpha}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n),\end{aligned}$$

ahol $r = \frac{\Delta t \alpha}{\Delta x^2}$ stabilitási konstans (a módszer stabil ha $r \leq 0,5$) felhasználásával az iteratív módszer a hőmérséklet adott $(n+1)$ számú Δt lépés után az i -edik pontban:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n).$$

Ezt a módszert nagyon könnyű négyzetrácsra általánosítani, csak az utolsó zárójel változik meg az alábbi módon:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + r \left(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n \right),$$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + r \left(u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 4u_{i,j}^n \right).$$

Ezt már nagyon könnyen lehet programozni.

2. Eredmények

A szimuláció futtatása generál szimulációnként 6 datafilet, amikben a teljes futásidő 1/6 -ánál, és ennek egész számszorosainál a rendszer pillanatfelvétele található. Ezeket a fileokat gnuplottal plottoltam, „heatmap”-ként (*p „datafile.dat” matrix with image*) erre könnyen lehet scriptet írni, így az ábrakészítés is automatikus lesz.

Azért, hogy a változás (a folyamatos melegedés) jól látható legyen, rögzítettem a heatmap színskáláját. A számok maguk természetesen nem bírnak jelentéssel, de a nagyságrend nyomkövetése miatt láthatónak hagytam őket. A megoldások $n = 0, 33332, 49998, 66664, 83330, 99996$ időléptetés után a !!! ábrákon láthatók. Az első az az eset, amikor lefelé nő a bal peremen rögzített hőmérsékletprofil. A teljes kezdőfeltétel az első esetben:

$$u_{i,j}^0 = 3 \cdot (100 - i) + j,$$

a második esetben :

$$u_{i,j}^0 = 3 \cdot i + j.$$

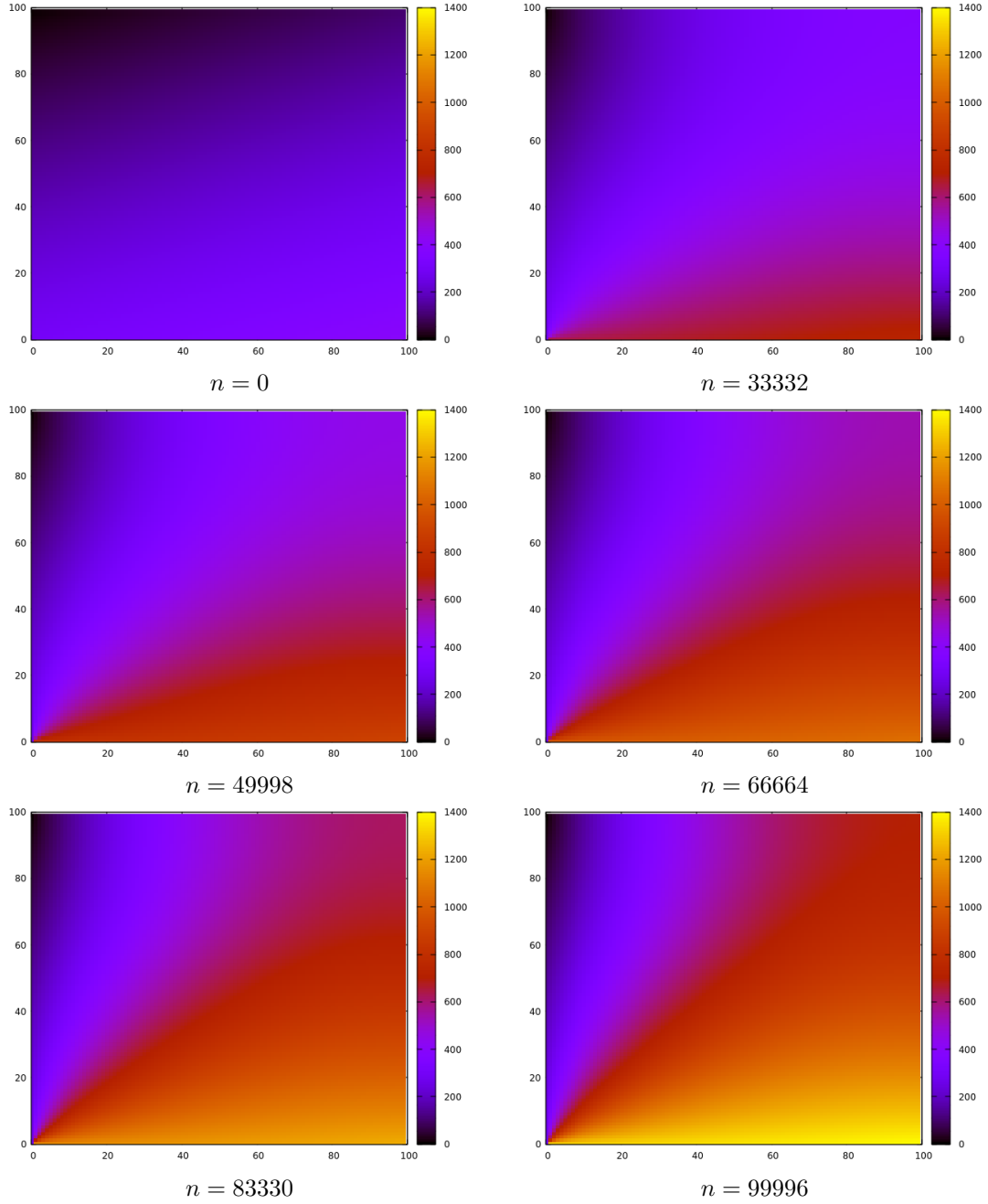
Az ábrákon nagyon jól látható a korábban tárgyalt jelenség. Mivel a bal alsó sarokban két nagyon különböző peremfeltételnek kell eleget tennie a hőmérsékletnek, ezért ott bizonyos szempontból egy kritikus helyzet alakul ki, és a fűtés sebességétől, valamint a rögzített perem hőmérsékletétől függ, hogy milyen gyorsan tud „kitörni” a hőáram innen is.

Mivel a rendszernek két különböző típusú (Neumann és Dirichlet) peremfeltételt kell teljesítenie egyidejűleg, nincs még kvázistabil állapota sem, tehát nincs se egyensúlyi helyzet, amikor minden hőmérséklet változatlan, se olyan állapot amikor a hőmérséklet nő ugyan, de mindenhol ugyan olyan sebességgel (ezt neveztem itt kvázistabil állapotnak).

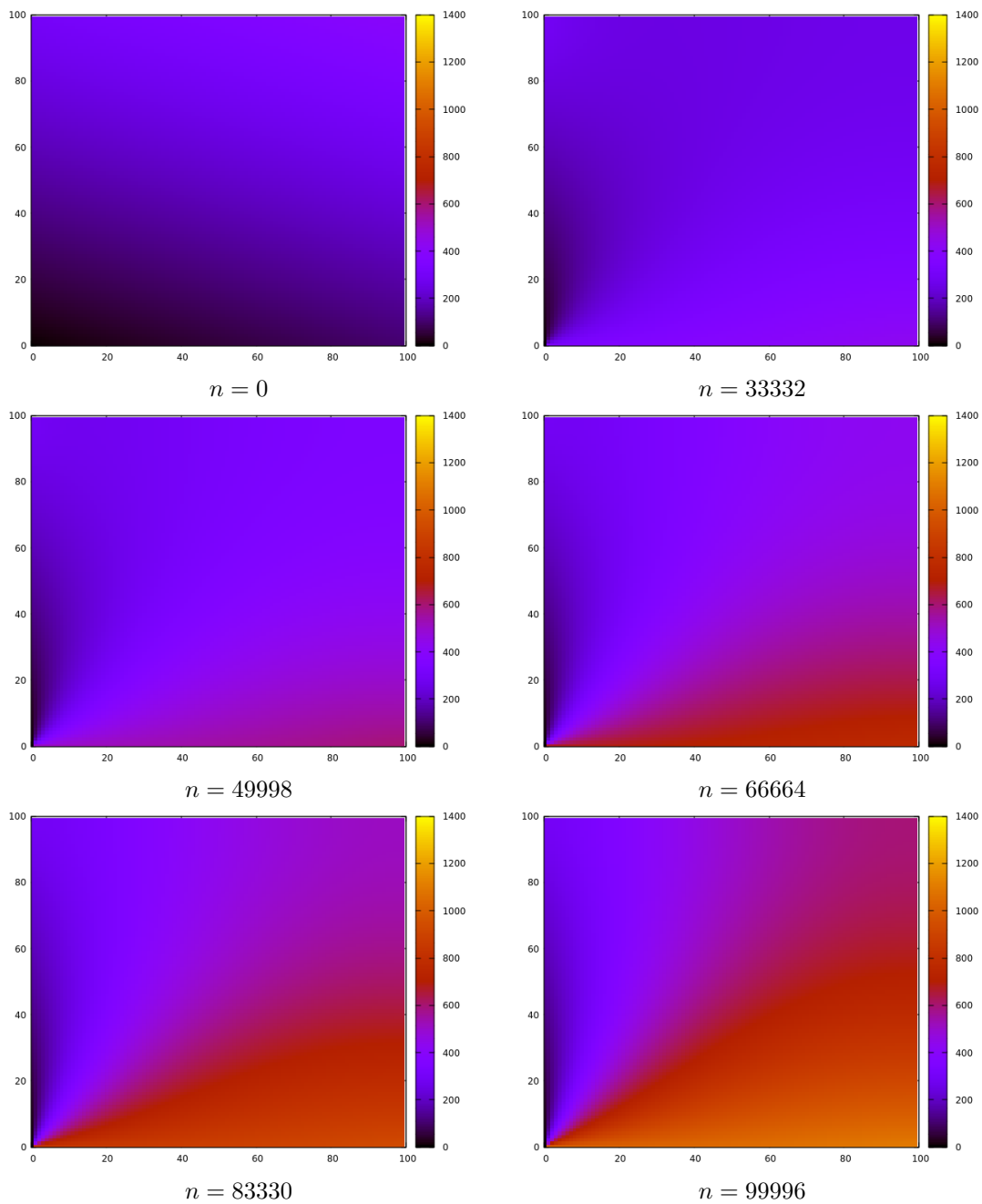
3. Összefoglalás, kitekintés

További érdekes kérdés lehet megvizsgálni, további speciális peremfeltételek esetén a rendszer viselkedését. Speciális helyzet például, ha a rögzített hőmérséklet konstans (nem 0, mert az nem túl érdekes) a bal oldalon, és az alul folyó hőáram 0 (azaz ezen az oldalon is tökéletes szigetelés van).

Nagyobb rendszer ugyan ilyen jellegű viselkedést mutatna, csak lassabban látszódná meg a különbség a két különböző peremérték esete között.



1. ábra. A rendszer időfejlődése, amikor a baloldali peremfeltételben megadott hőmérséklet lefelé lineárisan nő



2. ábra. A rendszer időfejlődése, amikor a baloldali peremfeltételben megadott hőmérséklet lefelé lineárisan csökken