Minimális felület számolás

ELTE, Modern numerikus módszerek jegyzőkönyv

Dénes Gábor Oszkár

2015. június 28.

Kivonat

Két félkör alakú drótkeret között állapítottam meg a közöttük létrejövő szappanhártya alakját. A két félkör alakú drót síkja egymásra merőleges. A szappanhártya a legkisebb felület alakját veszi ilyenkor fel. A felület differenciálegyenletének megoldásához Newton módszert használtam.

1. Elméleti bevezetés

Minimális felületet szeretnék meghatározni. A felület legyen Γ, és legyen ismert a körvonala. A felületet jelöljük egy $u(x,y)$ függvénnyel, mely az adott ponton a magasságot jelöli az $x-y$ síktól. Egy kis, parallelogramma alakú felületdarabra

$$dA = \left|\vec{dx} \times \vec{dy}\right|, \tag{1.1}$$

ahol $\vec{dx}$ és $\vec{dy}$ a paralelogramma oldalainak vektora. Az adott $u(x,y)$ felületre igaz, hogy egy kis dx, dy felületdarabra

$$\vec{dx} = (dx, 0, \frac{du}{dx}dx) = dx(1, 0, \partial_x u), \tag{1.2}$$

$$\vec{dy} = (0, dy, \frac{du}{dy}dy) = dy(0, 1, \partial_y u), \tag{1.3}$$

amiből dA meghatározható, tehát

$$A = \int_\Gamma dx\, dy \sqrt{1 + (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2}. \tag{1.4}$$

A legkisebb felületnél, ha megváltozik u δu-val, akkor $\delta A = 0$, tehát felhasználva az Euler egyenleteket

$$\partial_x(\gamma \partial_x u) + \partial_y(\gamma \partial_y u) = 0, \tag{1.5}$$

ahol

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2}}. \tag{1.6}$$

A körvonalat úgy határoztam meg, hogy legyen

$$c(\varphi) = \left(\cos(\varphi), \sqrt{\frac{1}{2}}\sin(\varphi), \sqrt{\frac{1}{2}}\sin(\varphi)\right), \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{1.7}$$

Mindezeken kívül nyilvánvaló, hogy a megoldásnak az x és y tengelyre is szimmetrikusnak kell lennie, ezért csak a pozitív negyedre fogunk számolni, olyan határfeltételekkel, hogy a tengelyeken a derivált nulla.

2. Numerikus módszer

A differenciálegyenlet amelyet meg kell oldani egy nemlineáris egyenlet, ezért érdemes a Newton módszert használni, amely iteratív eljárás.

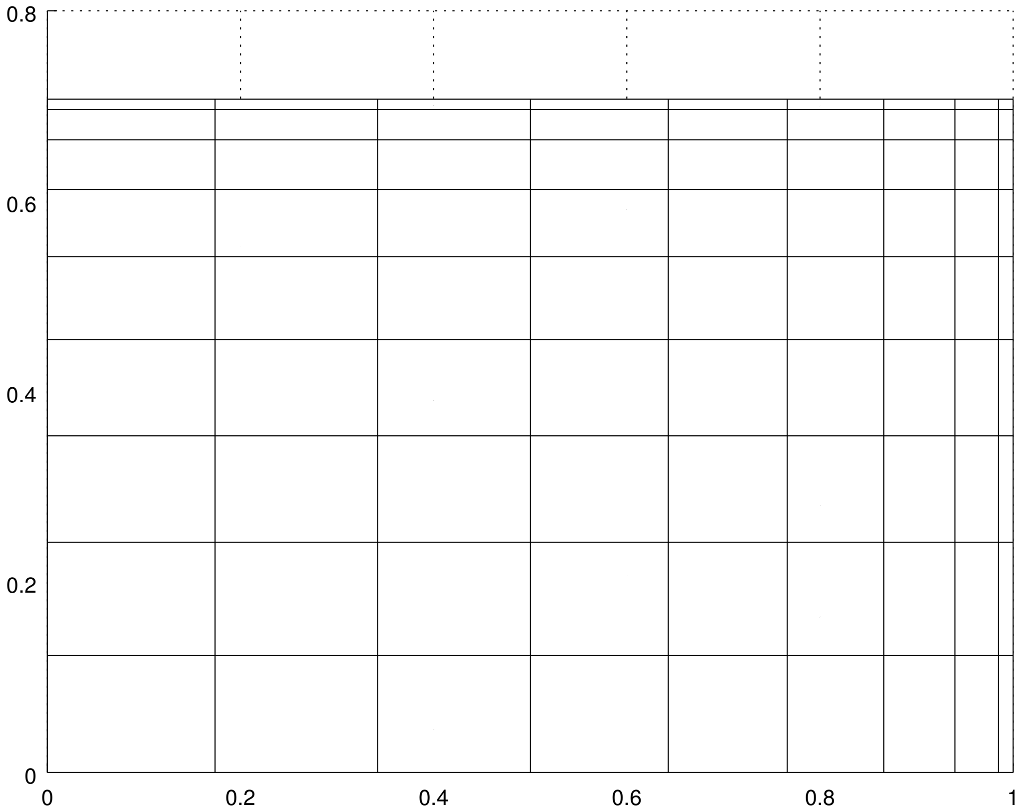
2.1. Diszkretizáció

Diszkretizáljuk a differenciálegyenletet úgy, hogy legyen az $x-y$ síkon

$$x_i = \sin\left(i\frac{\pi}{2(N-1)}\right), \tag{2.1}$$

$$y_i = \sqrt{\frac{1}{2}}\sin\left(i\frac{\pi}{2(N-1)}\right), \tag{2.2}$$

ahol $i \in \{0, 1, ..., N-1\}$. Így van egy $N \times N$ rács, amelynek egyik átlója pont a körvonal.



1. ábra. Használt beosztás. Itt $N = 10$.

A deriváltakat lehet úgy közelíteni (másodrendig), hogy

$$\partial_x u_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2dx}, \tag{2.3}$$

$$\partial_x \partial_x u_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{dx^2}, \tag{2.4}$$

Az f függvény diszkretizált változata így

$$f_{i,j} = \frac{1}{4}(\partial_x \gamma_{i,j})(\partial_x u_{i,j}) + \frac{1}{4}(\partial_y \gamma_{i,j})(\partial_y u_{i,j}) + \gamma_{i,j}(\partial_x \partial_x u_{i,j} + \partial_y \partial_y u_{i,j}). \tag{2.5}$$

A határfeltételek ezért előírhatjuk, hogy

$$u_{i,N-i-1} = y_{i,N-i-1}, \tag{2.6}$$

továbbá az x tengelyen lévő pontokra $\partial_x u = 0$, és hasonlóan az y tengelyen $\partial_y u = 0$. Ezt úgy oldottam meg, hogy előírtam, hogy legyen

$$u(-1, 0) = u(1, 0), \tag{2.7}$$

$$u(0, -1) = u(0, 1), \tag{2.8}$$

amit úgy lehet előírni, hogy a diszkretizált egyenletbe ezeket az értékeket helyettesítem.

Általában $N = 50$ felbontást használtam.

2.2. Newton iteráció

Szeretnénk előírni az $u_{i,j}$ értékekre, hogy $f_{i,j} = 0$. Iteratív eljárással egyre közelebb kerülhetünk a valódi megoldáshoz. Legyen az u n. iteráltja $u^n_{i,j}$ úgy, hogy

$$u^n = u^{n-1} - J(u^{n-1})^{-1} f(u^{n-1}). \tag{2.9}$$

J a Jacobi mátrix

$$J_{ij,kl} = \frac{\partial f_{i,j}}{\partial u_{k,l}}. \tag{2.10}$$

Általános esetben van J-nek nemdiagonális eleme is, de mi itt vegyük csak a diagonális elemeit. A számolt eredmények szerint ez elegendő. Amikor a nemdiagonális elemeket is használtam, akkor a megoldás nem volt konvergens, valószínűleg mert nem tudtam megfelelően beállítani a bonyolult határfeltételeket erre az esetre.

A Jacobi függvény így

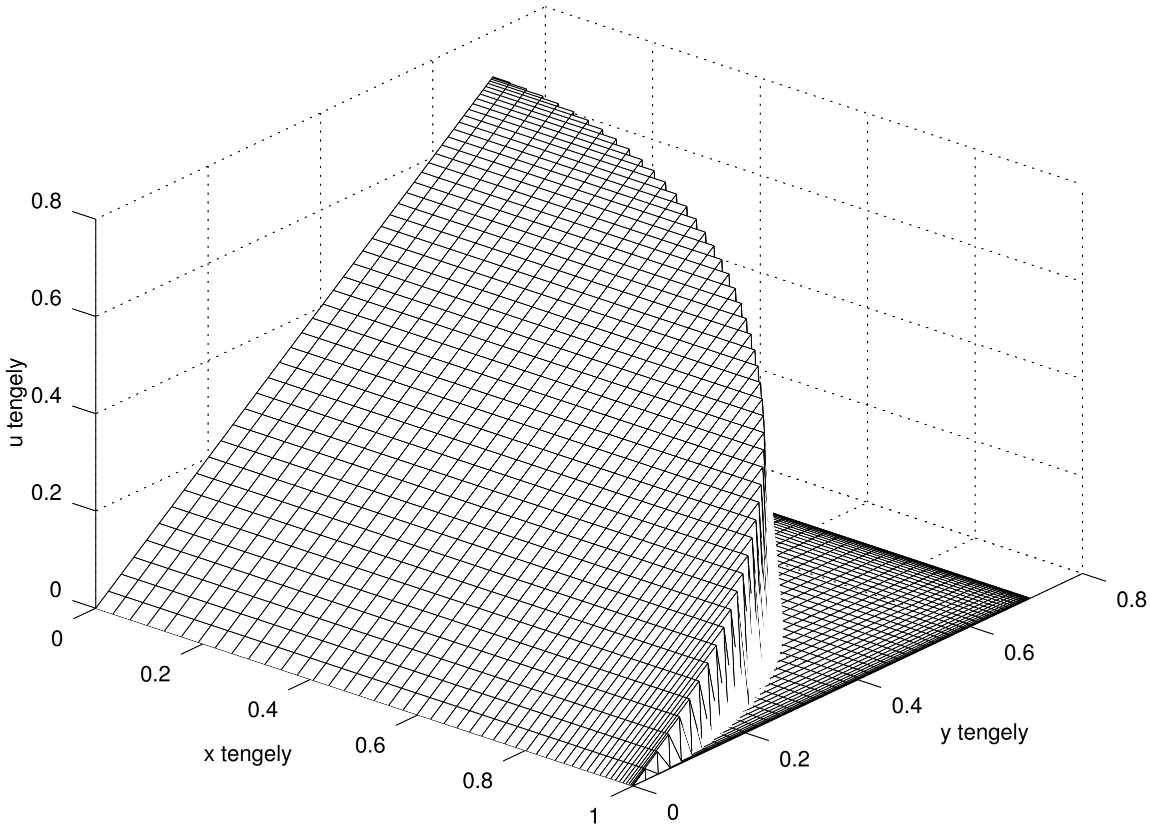
$$J_{i,j} = \frac{1}{4}(\gamma'_{i+1,j} + \gamma'_{i-1,j})\partial_x u^2_{i,j} + \frac{1}{4}(\gamma'_{i,j+1} + \gamma'_{i,j-1})\partial_y u^2_{i,j} - 2\gamma_{i,j}\left(\frac{1}{dx^2} + \frac{1}{dy^2}\right), \tag{2.11}$$

ahol

$$\gamma'_{i,j} = (1 + (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2)^{-3/2}. \tag{2.12}$$

Az iteráció első elemét, azaz u^0-t többféleképpen meg lehet határozni, de legyen sima függvény, különben nem fog jól konvergálni az iteráció. Úgy választottam meg, hogy az a két félkör síkjába essen, azaz

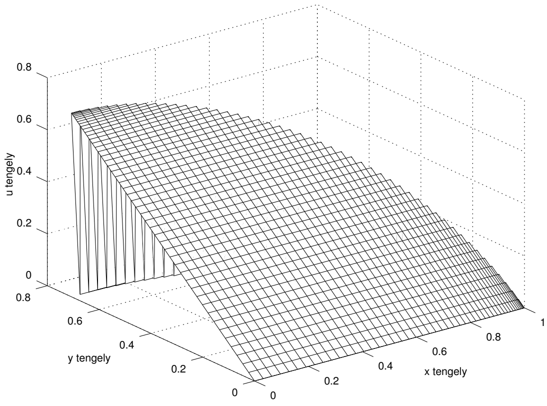
$$u^0_{i,j} = y_{i,j}. \tag{2.13}$$



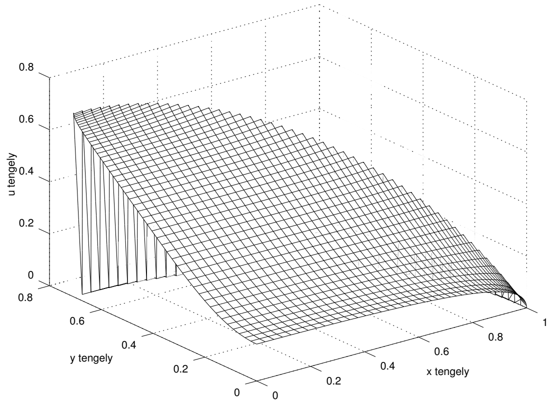
2. ábra. Kezdeti u érték, azaz u^0. $N = 50$.

3. Numerikus számolás eredmények

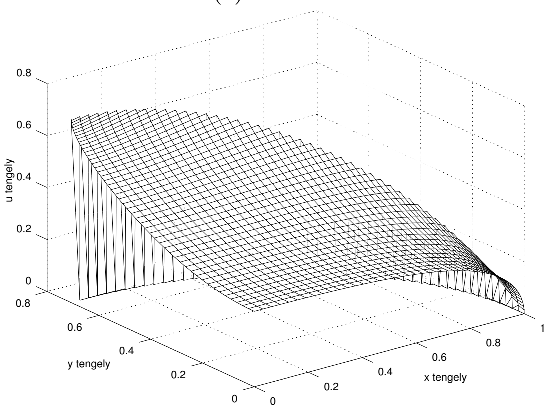
Nézzük meg különböző iterációkra hogyan alakul u. $N = 50$.



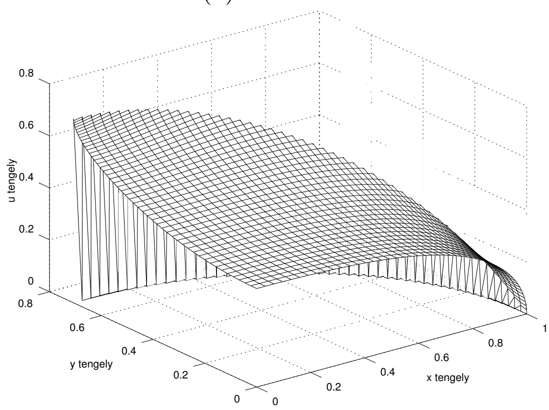
(a) 0. iteráció.



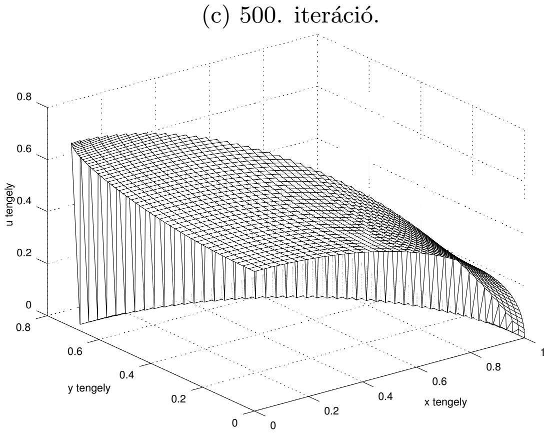
(b) 100. iteráció.



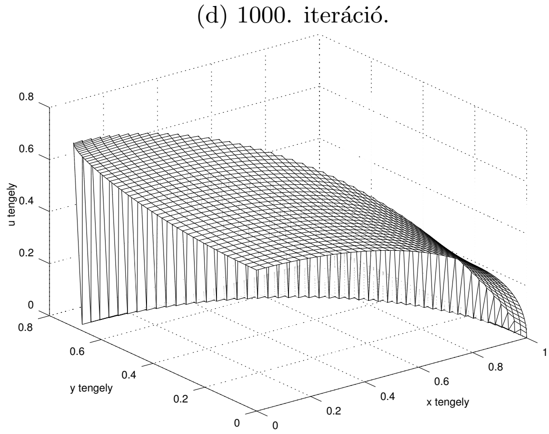
(c) 500. iteráció.



(d) 1000. iteráció.

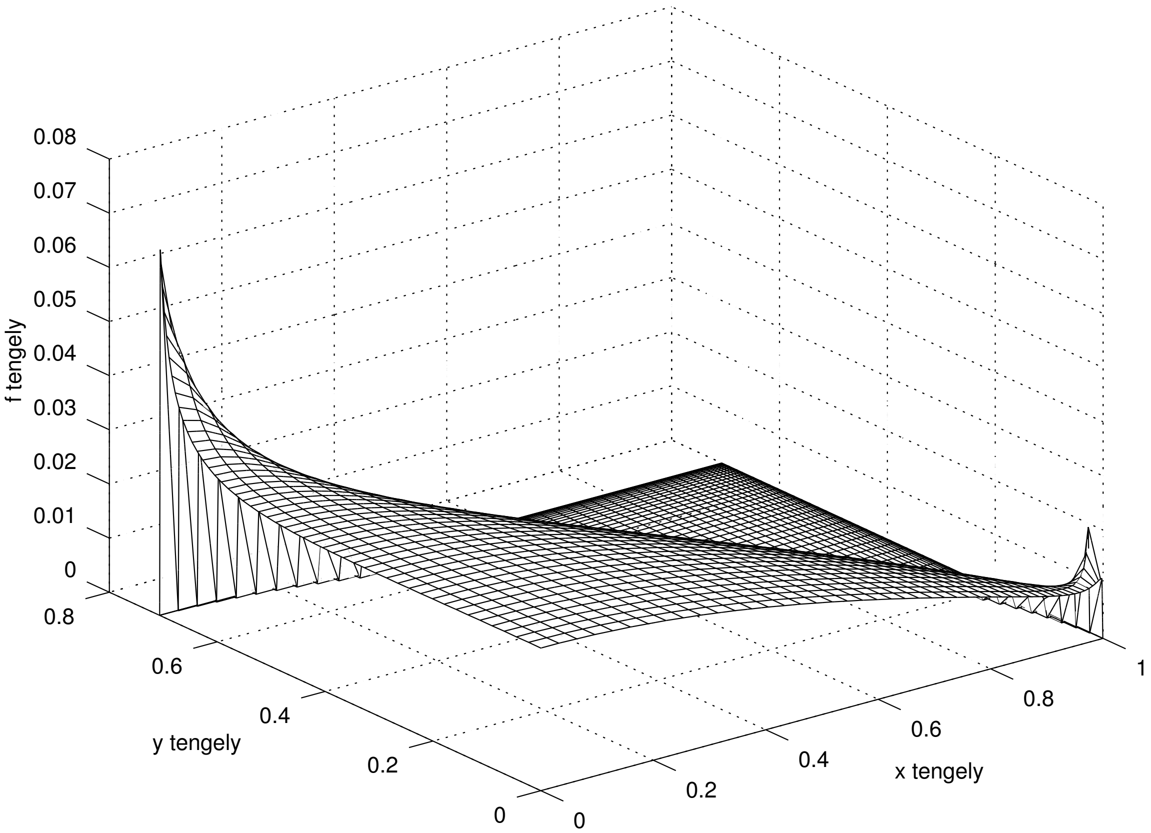


(e) 5000. iteráció.

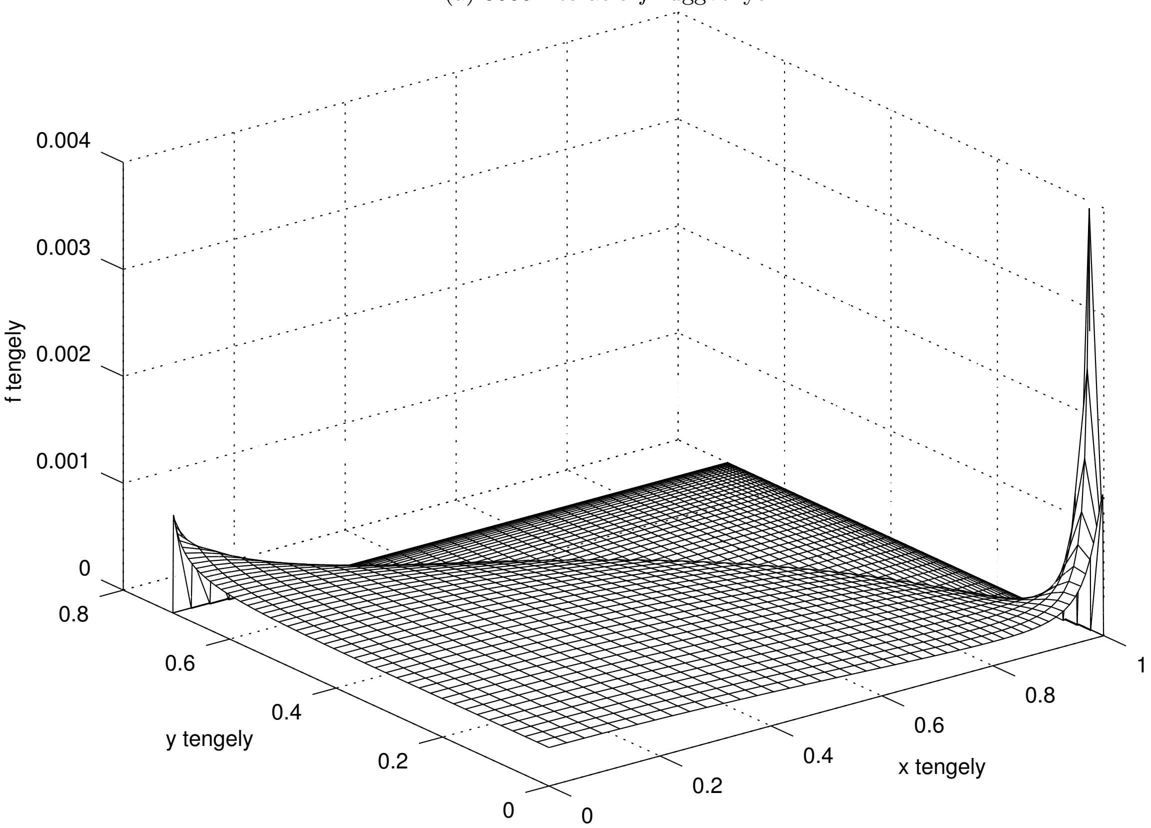


(f) 10000. iteráció.

Ellenőrizhetjük, hogy ez jó megoldás-e, ha hasonlóan kirajzoljuk f-t. Minél közelebb van ez 0-hoz, annál jobb a megoldás.



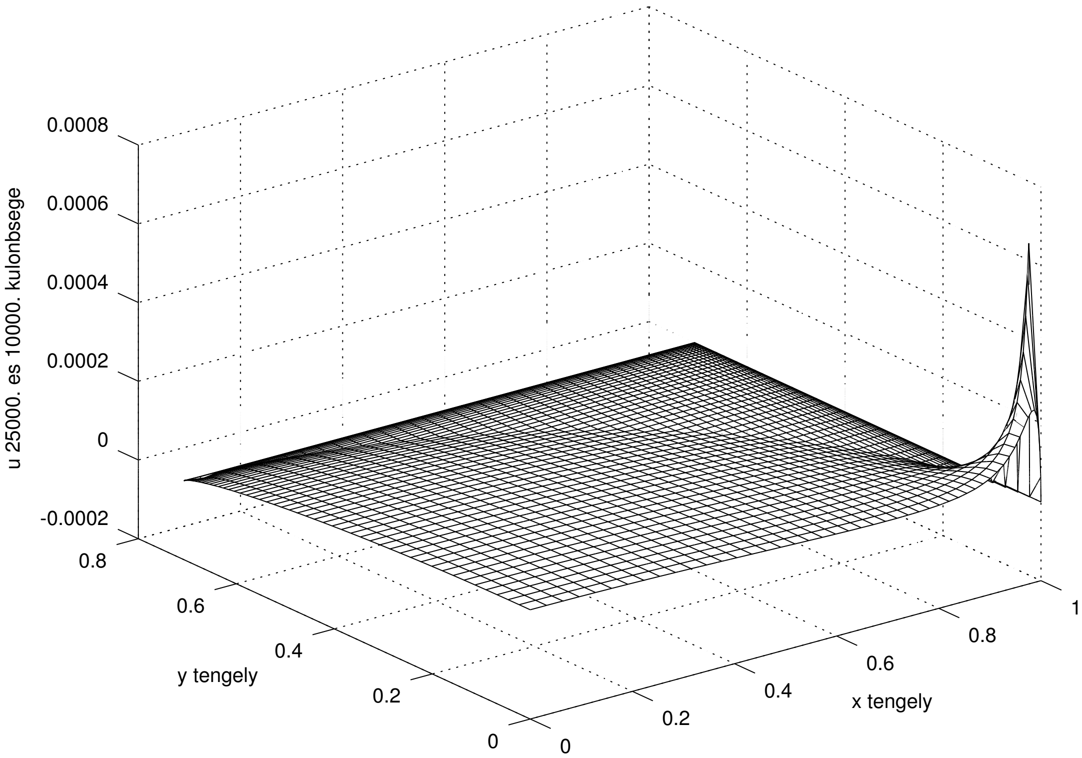
(a) 5000. iteráció f függvénye.



(b) 10000. iteráció f függvénye.

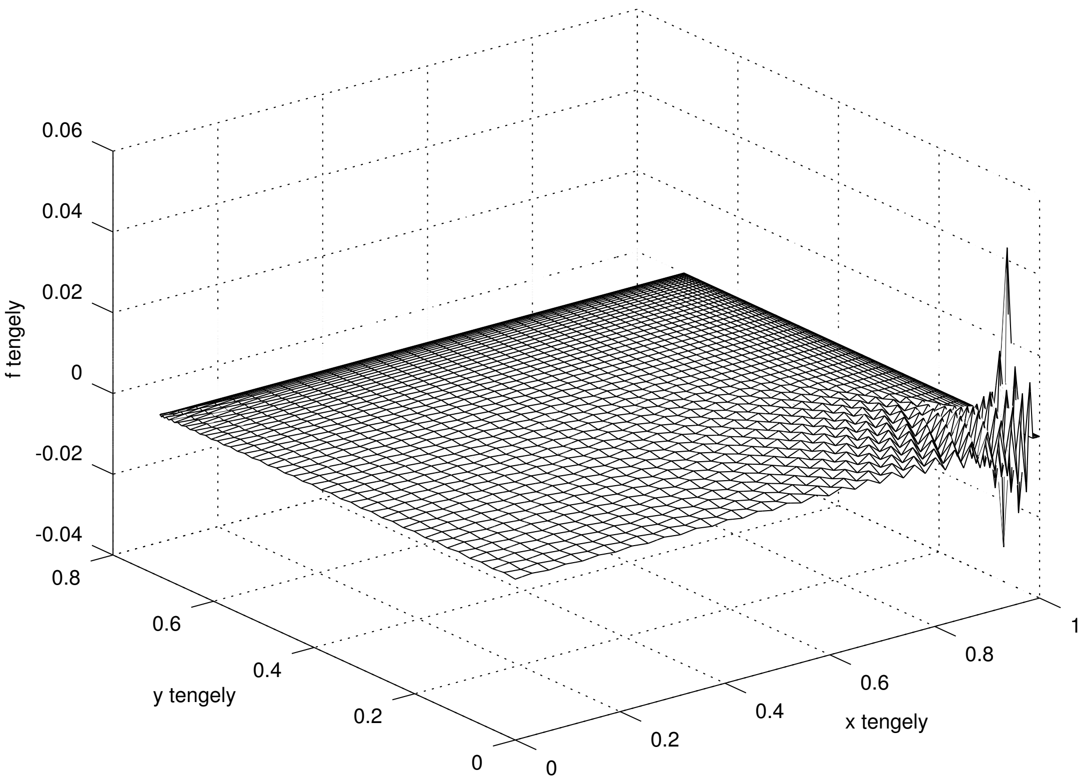
Látható, hogy egyre közelebb vagyunk a megoldáshoz. Kicsit egyenetlenül oszlik el a hiba. A numerikus derivált magasabbrendű közelítésével valószínűleg jobb eredményt lehet elérni a sarkokon, ahol a hiba nagyobb.

Az iterálást akkor fejezhetjük be, ha $|u^{n+1} - u^n|$ elég kicsi. Ezért kirajzoltam a 25000 és 10000 iterált közötti különbséget.



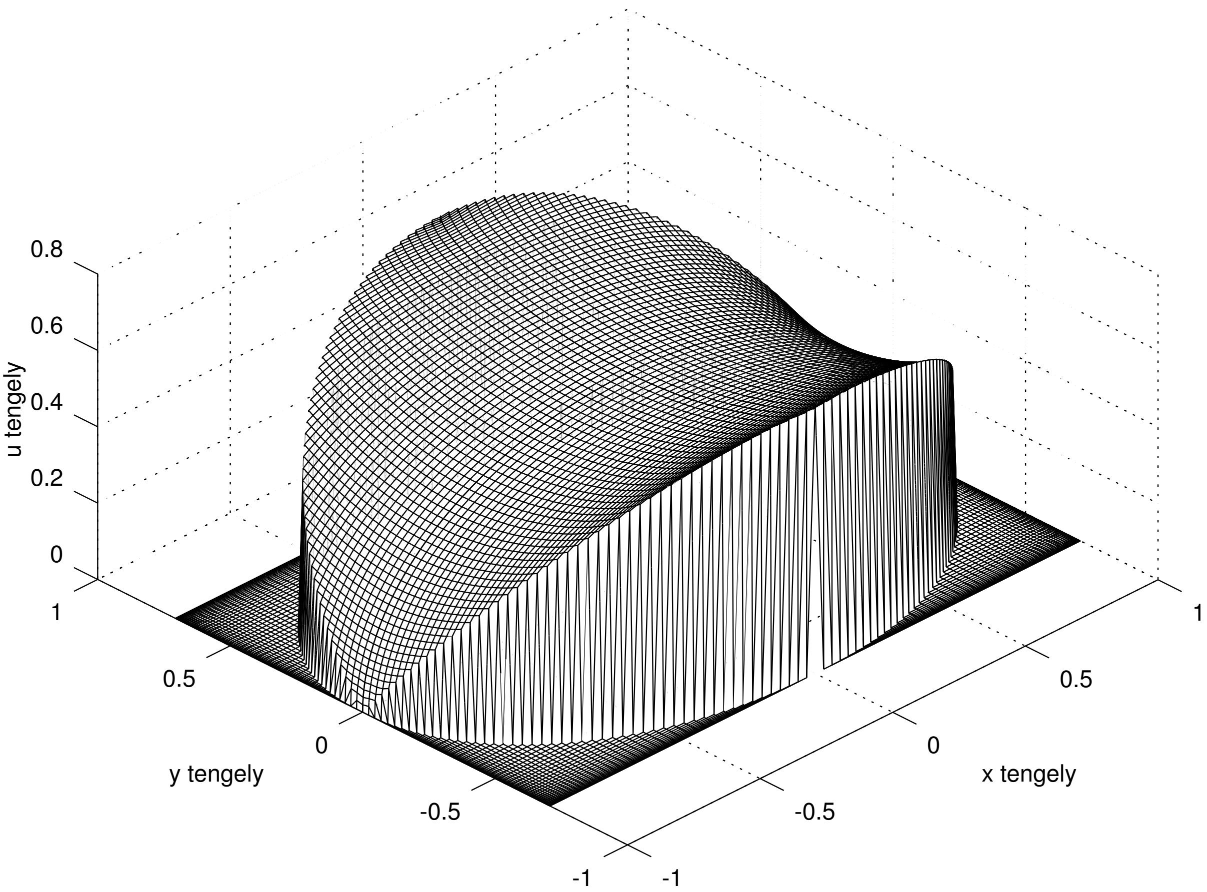
5. ábra. Az u 25000. és 10000. iteráció különbsége.

Természetesen sokkal kisebb a 25000-hez közeli iterált és a 25000. iterált különbsége. Mivel a 25000. iteráltnál az alábbi ábrából láthatóan nagyon kicsi f értéke, ezért itt megállhatunk.



6. ábra. 25000. iteráció f függvénye.

Kirajzoltam a teljes függvényt alábbiakban a 25000. iterációnál.



7. ábra. 25000. iteráció teljes u függvénye.