

Hővezetés egyenletének megoldása gömbhéjon, mozgó hőforrással

Modern numerikus módszerek a fizikában

Takács Péter

Neptun-kód: D1VLPR



Eötvös Lóránd Tudományegyetem

Tartalomjegyzék

1. Feladat	1
2. Hővezetés egyenlete	1
3. Parciális differenciálegyenlet megoldása	1
4. Eredmény	2

1. Feladat

Oldja meg az időfüggő hővezetés egyenletét gömbhéjra a következő feltételek mellett:

- minden pontban időfüggő forrás van jelen, melynek forráserőssége

$$\max(0, \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi - \omega t)) \quad (1)$$

- minden pontban az abszolút hőmérséklet negyedik hatványával arányos nyelő van jelen (sugárzási hőveszteség)
- kezdetben a hőmérséklet a gömbhéj minden pontjában azonos.

2. Hővezetés egyenlete

Kiindulásnak az általános hővezetési egyenletet vettem figyelembe:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta^2 u = 0 \quad (2)$$

ahol $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$. Gömbhéjon továbbá szükség van térbeli polár koordináták alkalmazására $(x, y, z - r, \theta, \phi)$, aminél a hővezetés egyenletében szereplő Δ^2 a következő módon néz ki:

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (3)$$

Gömbhéj esetében a héj vastagsága nagyon kicsi, ezért jó közelítés a $\frac{\partial}{\partial r} = 0$, továbbá az egyszerűség kedvéért legyen $r = 1$. Így a Laplace-t visszaírva a hővezetés egyenletébe:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \quad (4)$$

Esetünkben a hőmérsékletre (T) szeretnénk megoldani az egyenletet, továbbá van egy időfüggő mozgó hőforrás (q), és hőveszteség. Így az egyenlet a következőképp alakul:

$$q = \max(0, \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi - \omega t)) \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] + q - cT^4 \quad (6)$$

ahol az ω az időfrekvencia, és c a hőveszteségi együttható.

3. Parciális differenciálegyenlet megoldása

A következő lépés egy numerikus módszer alkalmazása a parciális differenciálegyenlet megoldásához. A megoldáshoz sok módszer ismert, én az FTCS (forward time, central space), explicit-Euler megoldót fogom alkalmazni. A lépéseket n index-szel fogom jelölni az alább sorolt egyenletekben.

A probléma megoldásához szükséges felbontani a gömbfelületet diszkrét területegységekre, az alább sorolt egyenletekben az i, j index a gömbfelület kiterített hálóján lévő négyzetrácsokat fogja jelölni. A négyzetrácsok θ, ϕ egységekből voltak felbontva (ahol $\theta = [0, \pi)$, és $\phi = [0, 2\pi)$). Mivel, mind a két irányban az első, és utolsó egymás mellett van, ezért a programozás során oda kellett figyelni a peremfelületekre. Szingularitások előfordulhatnak $0, \pi, 2\pi$ körül, emiatt ezen értékeknél leap-frog szerű átlagolást végeztem a négyzetrács környezetéből.

$$\frac{\partial T(t_n)}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (7)$$

$$\frac{\partial T(t_n)}{\partial \theta} = \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2\Delta\theta} \quad (8)$$

(leap-frog a nagyobb pontosság miatt)

$$\frac{\partial^2 T(t_n)}{\partial \theta^2} = \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{\Delta\theta^2} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 T(t_n)}{\partial \phi^2} = \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\Delta\phi^2} \quad (10)$$

Ezen egyenletek segítségével fel lehet írni a teljes differenciálegyenletet, majd numerikusan megoldani.

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{\Delta\theta^2} + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\Delta\phi^2} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2\Delta\theta} \right] + q - cT^4 \quad (11)$$

4. Eredmény

Az eredményeket egy külön videófájlban csatolom.

A szimulációban felhasznált paraméterek nagyon érzékenyek a szimuláció kimenetelére. A feladatot csak kis Δt mellett tudtam futtatni, nagyobb Δt ezen rácsmért, és α paraméter mellett numerikusan instabil.

Az én helyzetemben a feladat a program működésének ismertetése volt, nem pedig egy konkrét szituáció modellezése. Emiatt a megválasztott paraméterek tetszőlegesek.

A felhasznált paraméterek a következők:

- Felbontás, ϕ irányban N , θ irányban $\frac{N}{2}$: $N = 100$
- Lépésköz ideje: $\Delta t = 0.000001$
- Hővezetési együttható: $\alpha = 1$
- A jelentősebb hőforrás vizsgálatához beszoroztam egy konstanssal a q értéket: $b = 20$
- Hőforrás időfrekvenciája: $\omega = 50$
- Hővesztési együttható: $c = 0.0000001$
- Hőforrás iránya: $\theta_0 = \frac{\pi I}{4}$
- Kezdeti hőmérséklet: $T_0 = 100$
- Négyzetrács magassága: $\Delta\theta = \frac{\pi}{N/2}$
- Négyzetrács szélessége: $\Delta\phi = \frac{2\pi}{N}$, ami megegyezik a $\Delta\theta$ -val
- Pillantkép készítésének frekvenciája: 1 kép / 200 lépés
- Lépések száma: 120001

Hivatkozások

- [1] <http://planetmath.org/derivationofthelaplacianfromrectangulartosphericalcoordinates>
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation